B. LEWANDOWSKA — J. LIPCZYŃSKI

MATEMATYKA

PODRĘCZNIK DLA KLASY IX
KORESPONDENCYJNEGO
LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCEGO

IX

PAŃSTWOWE ZAKŁADY WYDAWNICTW SZKOLNYCH

UWAGI WSTĘPNE

Podręcznik niniejszy obejmuje kurs matematyki wyznaczony przez program dla klasy IX ogólnokształcących liceów korespondencyjnych oraz ogólnokształcących liceów dla pracujących. Kurs ten składa się tak jak w klasie VIII z dwóch działów: algebry i geometrii. Obydwa działy są jednakowo ważne, geometrii trzeba uczyć się tak samo pilnie jak algebry.

Na przerobienie całości materiału przewidziano 96 lekcyj, z czego na pierwszy okres przypada 26 lekcyj, na drugi i trzeci okres po 24 lekcje, na czwarty okres 22 lekcje.

W liceum dla pracujących tempo przerabiania materiału w poszczególnych okresach reguluje nauczyciel. W szkole korespondencyjnej uczeń organizuje sobie całą pracę sam. Aby mu w tym pomóc, podajemy następujące wskazówki.

Okres pierwszy trwający w liceum korespondencyjnym*) od 15. IX. do 30. XI. jest stosunkowo dość długi. W okresie tym wystarczy zajmować się matematyką trzy razy w tygodniu. Okresy: drugi (1. XII. — 31. I.) i trzeci (1. II. — 31. III.) są krótkie i wymagają od ucznia szczególnie wytężonej pracy: na matematykę trzeba w nich przewidzieć co najmniej cztery zajęcia tygodniowo. To samo tempo pracy należy zachować w dłuższym nieco okresie czwartym (1. IV. — 15. VI.) ze względu na konieczność gruntownego powtórzenia całego materiału przed egzaminem promocyjnym.

Powodzenie w uczeniu się matematyki jest niemożliwe bez czynnej, aktywnej postawy ucznia, na którą trudno jest zdobyć się człowiekowi zmęczonemu. Dlatego plany zajęć w szkołach są zwykle tak układane, aby lekcje matematyki odbywały się w tych godzinach, kiedy uczniowie nie są jeszcze zmęczeni nauką. Organizując sobie

*) Podział roku szkolnego na okresy w szkołach dla pracujących jest podobny jak w szkołach młodzieżowych.

naukę samodzielnie, należy również z tym się liczyć i przeznaczać na naukę matematyki czas jak najodpowiedniejszy.

Do nauki matematyki potrzebne są trzy zeszyty: zeszyt w kratkę do algebry, zeszyt bez linii do geometrii oraz brulion podręczny. W zeszytach piszemy (czysto i porządnie) piórem, a rysujemy (również jak najstaranniej) dobrze zaostrzonym ołówkiem. W brulionie podręcznym możemy pisać ołówkiem. Jako pomoce do geometrii konieczne są ponadto: cyrkiel, linijka i ekierka.

Praca na lekcji matematyki powinna przebiegać w sposób następujący. Przede wszystkim powtarzamy krótko materiał lekcji poprzedniej, aby utrwalić w pamięci poznane reguły, wzory, twierdzenia itp. Następnie przechodzimy do studiowania nowej lekcji. Czytając ją po raz pierwszy, nie zagłębiamy się jeszcze w treść podanego materiału, lecz staramy się zorientować, czego na tej lekcji mamy się nauczyć. Drugie czytanie musi być już bardzo uważne i dokładne. Jeśli tematem lekcji jest na przykład dowód twierdzenia, należy zastanowić się, co jest w tym twierdzeniu założeniem, a co tezą, jak sporządzono rysunek, jak przeprowadzono dowód. Jeśli w studiowanej lekcji rozwiązano przykładowe zadanie, trzeba bardzo dokładnie przeczytać jego treść, uświadomić sobie, co jest dane, a co trzeba obliczyć lub zbudować, po czym bardzo uważnie prześledzić rozwiązanie zadania. Po takim gruntownym przestudiowaniu lekcji zamykamy książkę i (w brulionie podręcznym) przeprowadzamy samodzielnie dowód twierdzenia lub rozwiązujemy przykładowe zadanie. Następnie wpisujemy do zeszytu przedmiotowego poznane w tej lekcji reguły, wzory, twierdzenia (ilustrowane rysunkami) itp. Dla kontroli, czy dobrze przyswoiliśmy sobie nowy materiał, czytamy jeszcze pytania zamieszczone w podręczniku przy końcu lekcji i odpowiadamy na nie ustnie (głośno), starając się budować zdania poprawnie pod względem logicznym i gramatycznym. Z kolei — dla utrwalenia materiału — przerabiamy zadania wydrukowane po pytaniach. Rozwiązania tych zadań wpisujemy do zeszytu przedmiotowego. Przepisywanie pełnych tekstów zadań, szczególnie dłuższych, nie jest konieczne, trzeba jednakże podać numery zadań. Zeszyty przedmiotowe przedstawiamy nauczycielowi w czasie konsultacji, kolokwiów okresowych i egzaminu promocyjnego.

Rozwiązując zadanie, czytamy najpierw bardzo uważnie jego treść i to tyle razy, aż zdołamy je powtórzyć z pamięci bez zaglądania

do książki. Doświadczenie uczy bowiem, że najczęściej uczniowie nie umieją rozwiązać zadania dlatego, że nie uświadamiają sobie jego treści.

Po dokładnym zrozumieniu zadania notujemy za pomocą symboli matematycznych to, co jest dane, i to, co trzeba znaleźć (zapisując w ten sposób w skrócie treść zadania), i przystępujemy do obmyślenia planu rozwiązania.

Samodzielne rozwiązywanie zadań jest w nauce matematyki absolutnie konieczne; bez niego nie może być mowy o opanowaniu materiału.

Podręcznik zawiera zadania w znacznej obfitości. Wśród nich wyodrębniono trzy grupy. **Zadania i przykłady nie oznaczone gwiazdkami obowiązują wszystkich uczniów.** Zadania i przykłady oznaczone jedną gwiazdką stopniem trudności niewiele różnią się od zadań grupy pierwszej; są one przeznaczone dla osób, którym zależy na zdobyciu większej sprawności matematycznej. Trzecią grupę tworzą zadania oznaczone dwiema gwiazdkami. Są to zadania trudniejsze. Autorzy zamieścili je z myślą o uczniach specjalnie zainteresowanych matematyką. Do zadań trudniejszych podano w podręczniku (przy odpowiedziach) wskazówki, które ułatwiają rozwiązanie. Warto jednakże obchodzić się bez tych wskazówek, a korzystać z nich dopiero wtedy, gdy zawiodą rzetelne próby zupełnie samodzielnej pracy.

Po przepracowaniu wszystkich lekcyj przewidzianych na dany okres należy powtórzyć całość materiału. Powtórzenie ułatwiają pytania zamieszczone w podręczniku na końcu każdego okresu (stronice 137, 243, 329, 416).

Celem zorientowania uczniów, wobec jakich wymagań staną na kolokwium czy na egzaminie promocyjnym, wydrukowano po wspomnianych pytaniach powtórzeniowych przykładowe pytania i zadania kolokwialne i egzaminacyjne (stronice 140, 245, 332, 418). Te pytania i zadania to jakby próba sił ucznia. Kto sobie z nimi poradzi, ten może być pewny, że opanował materiał w sposób wystarczający.

OKRES 1

Algebra

Pierwiastek kwadratowy. Liczby niewymierne. Pierwiastek stopnia naturalnego. Działania na pierwiastkach arytmetycznych. Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka. Lekcje od 1 do 15.

Geometria

Mierzenie odcinków. Stosunek odcinków. Proporcje odcinkowe. Lekcje od 16 do 19.
Mierzenie pól wielokątów. Lekcje od 20 do 22.
Twierdzenie Talesa i jego odwrócenie. Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie. Lekcje od 23 do 26.

Powtórzenie algebry
Powtórzenie geometrii
Zadania

LEKCJA 1

Pierwiastek kwadratowy

Wszystkie lekcje algebry w pierwszym okresie wypełni nauka o pierwiastkach. Warunkiem powodzenia w tej nauce jest dobra znajomość potęgowania. Przypomnijmy niektóre wiadomości z tej dziedziny.

OKREŚLENIE. **Potęgą** liczby a o wykładniku n nazywamy iloczyn n czynników, z których każdy jest równy a. Liczba a nazywa

się **podstawą**, liczba n — **wykładnikiem potęgi**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Przez a^1 rozumiemy samą liczbę a

$$a^1 = a$$

Z określenia potęgi wynika, że:

1. Podnosząc do potęgi liczbę dodatnią, otrzymujemy w wyniku zawsze liczbę dodatnią. Np. $5^3 = 125$, $2^6 = 64$.

2. Podnosząc liczbę ujemną do potęgi o wykładniku parzystym, otrzymujemy w wyniku liczbę dodatnią. Np. $(-3)^4 = 81$.

3. Podnosząc liczbę ujemną do potęgi o wykładniku nieparzystym, otrzymujemy w wyniku liczbę ujemną. Np. $(-5)^3 = -125$.

Postawmy teraz pytanie: Jaką liczbę należy podnieść do potęgi drugiej, aby otrzymać 25?

Chodzi tu o znalezienie liczby x spełniającej warunek

$$x^2 = 25$$

Odruchowo powiemy, że szukaną liczbą jest 5, po chwili zastanowienia jednakże damy odpowiedź dokładniejszą: postawiony warunek spełnia nie tylko liczba 5, lecz również -5, gdyż zarówno $5^2 = 25$, jak $(-5)^2 = 25$.

Zatem jeśli $x^2 = 25$, to $x = 5$ lub $x = -5$.

Każdą z liczb 5 i -5 nazywamy pierwiastkiem kwadratowym z liczby 25. Dodatnią liczbę 5 nazywamy arytmetycznym pierwiastkiem kwadratowym z liczby 25.

OKREŚLENIE 1. **Pierwiastkiem kwadratowym** lub **pierwiastkiem drugiego stopnia** z liczby a nazywamy każdą liczbę, której kwadrat jest równy a.

OKREŚLENIE 2. **Arytmetycznym pierwiastkiem kwadratowym** lub **arytmetycznym pierwiastkiem drugiego stopnia** z liczby dodatniej a nazywamy liczbę dodatnią, której kwadrat jest równy a.

Arytmetyczny pierwiastek kwadratowy z liczby a oznaczamy symbolem

$$\sqrt{a}$$

przy czym a nazywamy **liczbą podpierwiastkową.**

Np. $\sqrt{25} = 5$, gdyż $5 > 0$ i $5^2 = 25$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}, \text{ gdyż } \frac{2}{3} > 0 \text{ i } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$\sqrt{3{,}24} = 1{,}8$, gdyż $1{,}8 > 0$ i $1{,}8^2 = 3{,}24$

$\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$, gdyż $0{,}1 > 0$ i $0{,}1^2 = 0{,}01$

Również (jedyny) pierwiastek kwadratowy z zera nazywamy pierwiastkiem arytmetycznym i oznaczamy symbolem $\sqrt{0}$. Jest oczywiście $\sqrt{0} = 0$.

Z określenia pierwiastka kwadratowego wynika, że **pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnej nie istnieje.** Na przykład nie istnieje pierwiastek kwadratowy z liczby -9, gdyż nie znamy takiej liczby, której kwadrat byłby liczbą ujemną.

Tak więc wyrażenia $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-16}$ itp. nic nie oznaczają. Wyrażenie $\sqrt{x-5}$ straci sens liczbowy, jeśli za x podstawimy liczbę mniejszą od 5. Podobnie wyrażenie $\sqrt{6-y}$ przestanie cokolwiek oznaczać, jeśli literze y nadamy wartość większą od 6.

Z określenia pierwiastka kwadratowego wynika dalej, że

$$\left(\sqrt{16}\right)^2 = 16, \quad \left(\sqrt{100}\right)^2 = 100, \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Pierwiastek kwadratowy z liczby a podniesiony do kwadratu daje w wyniku liczbę podpierwiastkową a.

Na zakończenie dzisiejszej lekcji podkreślmy jeszcze raz, że symbol $\sqrt{a}$ (gdzie $a \geqslant 0$) oznacza liczbę dodatnią lub zero (krócej mówimy: liczbę nieujemną).

W związku z tym zauważmy, że równość

$$\sqrt{x^2} = x$$

nie zawsze jest prawdziwa. Widać to z następującego przykładu:

$$\sqrt{7^2} = 7$$

ale

$$\sqrt{(-7)^2} = \text{nie równa się } -7$$

gdyż

$$\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$$

Natomiast prawdziwa jest równość

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

gdzie symbol $|x|$ oznacza wartość bezwzględną liczby x. Tak np.

$$\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$$

Podobnie

$$\sqrt{(x-5)^2} = |x-5|$$

Inaczej mówiąc

$\sqrt{(x-5)^2} = x-5$, gdy $x > 5$. Czytamy: x jest większe od 5, ale

$\sqrt{(x-5)^2} = 5-x$, gdy $x < 5$. Czytamy: x jest mniejsze od 5.

Sprawdźcie, że tak jest, przyjmując najpierw $x = 9$, a następnie $x = 2$.

Pytania

1. Co nazywamy potęgą?
2. W jakim przypadku wynik potęgowania liczby względnej jest liczbą dodatnią, a w jakim ujemną?
3. Co nazywamy pierwiastkiem kwadratowym z liczby a?
4. Co nazywamy arytmetycznym pierwiastkiem kwadratowym z liczby dodatniej a?
5. Co oznacza symbol $\sqrt{a}$?
6. Dlaczego pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych nie istnieją?
7. Omówcie równość $\sqrt{x^2} = |x|$

Zadania

1. Nauczcie się na pamięć następującej tabelki:

$1^2 = 1$	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$	$7^2 = 49$
$2^2 = 4$	$4^2 = 16$	$6^2 = 36$	$8^2 = 64$

$9^2 = 81$	$12^2 = 144$	$15^2 = 225$	$18^2 = 324$
$10^2 = 100$	$13^2 = 169$	$16^2 = 256$	$19^2 = 361$
$11^2 = 121$	$14^2 = 196$	$17^2 = 289$	$20^2 = 400$

2. Podajcie wartości pierwiastków i sprawdźcie:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{81}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{121}$ e) $\sqrt{625}$

f) $\sqrt{0{,}04}$ g) $\sqrt{0{,}49}$ h) $\sqrt{0{,}0064}$ i) $\sqrt{1{,}69}$ j) $\sqrt{0{,}0256}$

k) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ l) $\sqrt{\frac{25}{81}}$ ł) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ m) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ n) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$

3. Rozwiążcie i sprawdźcie równania:

a) $x^2 = 9$ b) $x^2 = \frac{4}{25}$ c) $x = 0{,}04$

d) $3x^2 = 48$ *e) $4x^2 = 9$ *f) $9x^2 = 1$

4. Obliczcie bok kwadratu, którego pole równa się:

a) 81 cm² *b) 256 cm² c) 3,24 m²

*d) 10000 m² *e) $\frac{16}{25}$ m² f) $7\frac{9}{16}$ m²

5. Obliczcie:

a) $\sqrt{16}+\sqrt{81}$ *b) $\sqrt{361}-\sqrt{144}$

c) $3\sqrt{25}-4\sqrt{9}$ *d) $\sqrt{\sqrt{81}}$ *e) $\sqrt{6+\sqrt{9}}$

f) $\sqrt{\sqrt{25}+\sqrt{16}}$ *g) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}}$ *h) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{9}}}}$

6. Obliczcie wartość wyrażenia:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

dla $a = 5,\ b = 16.$

7. Dla jakich wartości litery x następujące wyrażenia nic nie oznaczają?

a) $\sqrt{x}$ b) $\sqrt{x-15}$ c) $\sqrt{10-x}$ d) $\sqrt{x+6}$

8. Ktoś udowadniał, że $11 = 5$ w następujący sposób. Obie strony prawdziwej równości

$$11 + 5 = 2 \cdot 8$$

mnożymy przez $11 - 5$. Otrzymujemy

$$11^2 - 5^2 = 2 \cdot 8 \cdot 11 - 2 \cdot 8 \cdot 5$$

a stąd

$$11^2 - 2 \cdot 8 \cdot 11 = 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5$$

Do obu stron ostatniej równości dodajemy 8^2

$$11^2 - 2 \cdot 8 \cdot 11 + 8^2 = 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 + 8^2$$

Mamy więc

$$(11-8)^2 = (5-8)^2$$

a stąd

$$\sqrt{(11-8)^2} = \sqrt{(5-8)^2}$$

czyli

$$11 - 8 = 5 - 8$$

Dodając do obu stron 8, otrzymujemy

$$11 = 5$$

co było do okazania.

Znajdźcie błąd w tym dowodzeniu!

Odpowiedzi

2. Wskazówka do ł), m), n). Zamienić liczby mieszane na ułamki niewłaściwe. **3.** a) $x = 3$ lub $x = -3$, b) $x = \frac{2}{5}$ lub $x = -\frac{2}{5}$, c) $x = 0{,}2$ lub $x = -0{,}2$, d) $x = 4$ lub $x = -4$, e) $x = \frac{3}{2}$ lub $x = -\frac{3}{2}$, f) $x = \frac{1}{3}$ lub $x = -\frac{1}{3}$. **5.** d) 3, e) 3, f) 3, g) 2, h) 3. **6.** 3. **7.** a) Dla wartości x ujemnych, b) dla wartości x mniejszych od 15, c) dla wartości x większych od 10, d) dla wartości x mniejszych od -6.

LEKCJA 2

Liczby niewymierne

Czy pamiętacie określenie arytmetycznego pierwiastka kwadratowego z liczby dodatniej? Wypowiedzcie je głośno z pamięci, a następnie wykonajcie poniższe obliczenia, uzasadniając za każdym razem wynik:

$\sqrt{256} = 16$, gdyż $16 > 0$ i $16^2 = 256$

$\sqrt{1{,}96} =$

$\sqrt{\frac{289}{400}} =$

$\sqrt{1\frac{104}{121}} =$

Rachunki te z pewnością nie sprawiają Wam trudności, jeżeli tylko zapamiętaliście tabelkę ze str. 9—10.

Nie zawsze jednak zagadnienie wartości arytmetycznego pierwiastka kwadratowego przedstawia się tak prosto jak w przypadkach dotychczas spotykanych.

Weźmy np. pod rozwagę wyrażenie $\sqrt{2}$. Jest jasne, że

$\sqrt{2} \neq 1$, gdyż $1^2 < 2$

$\sqrt{2} \neq 2$, gdyż $2^2 > 2$

$\sqrt{2} \neq 3$, gdyż $3^2 > 2$ itd.

Uwaga. Znak $\neq$ czytamy: nie równa się.

Zatem: **$\sqrt{2}$ nie równa się żadnej liczbie całkowitej.**

Zbadajmy z kolei, czy można znaleźć liczbę ułamkową, która by była równa $\sqrt{2}$. Okazuje się, że takiej liczby ułamkowej nie ma.

Istotnie, przypuśćmy na chwilę, że

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

gdzie p i q są liczbami całkowitymi dodatnimi, przy czym $q > 1$. Możemy oczywiście przyjąć, że p i q nie mają wspólnego podzielnika, każdy bowiem ułamek można przez uproszczenie sprowadzić do ułamka, w którym licznik i mianownik są względem siebie pierwsze.

Jeśli $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, to — zgodnie z określeniem pierwiastka kwadratowego

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

czyli

$$\frac{p \cdot p}{q \cdot q} = 2$$

Od razu widzimy, że ostatnia równość jest sprzeczna. Skoro bowiem, jak założyliśmy, p i q nie mają wspólnego podzielnika, to również liczby $p \cdot p$ i $q \cdot q$ nie mają wspólnego podzielnika, to zaś dowodzi, że ułamek $\frac{pp}{qq}$ jest ułamkiem nieskracalnym o mianowniku większym od 1, a taki ułamek nie może równać się liczbie całkowitej 2.

Jak widać, nasze przypuszczenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą ułamkową, doprowadziło do niedorzeczności. Przypuszczenie to jest więc fałszywe, zatem **$\sqrt{2}$ nie równa się żadnej liczbie ułamkowej.**

Podobnie wykazalibyśmy, że

(I) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$ itp.

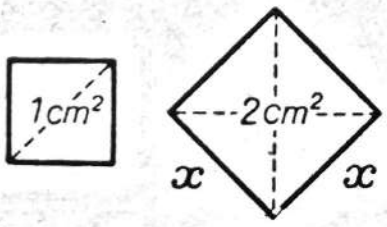
nie są liczbami całkowitymi ani liczbami ułamkowymi.

Z przeprowadzonych rozważań wypływają bardzo ważne konsekwencje. A oto dlaczego.

Wszystkie znane nam dotychczas liczby są liczbami całkowitymi lub ułamkami. Jeśli więc $\sqrt{2}$ i symbole (I) nie są ani liczbami całkowitymi, ani ułamkowymi, to stajemy wobec dwóch możliwości:

1. albo $\sqrt{2}$ i symbole (I) nie są w ogóle żadnymi liczbami,

2. albo też symbole te oznaczają nowe nie znane nam dotychczas liczby.



Rys. 1

Wiele momentów przemawia za przyjęciem drugiej możliwości. Mając np. dany kwadrat o polu 1 cm² możemy łatwo zbudować kwadrat o polu dwa razy większym, czyli o polu 2 cm² (patrzcie na rys. 1). Oznaczając bok większego kwadratu literą x i przyjmując, że poznany w szkole podstawo-

wej wzór na pole kwadratu odnosi się do wszelkich kwadratów, napiszemy:

pole kwadratu o boku x równa się xx, czyli x^2,

zatem $$x^2 = 2 \text{ cm}^2$$

stąd zaś wywnioskujemy, że

$$x = \sqrt{2} \text{ cm}$$

Jakkolwiek rozważanie powyższe jest raczej intuicyjne, to jednak skłania nas do przypuszczenia, że symbol $\sqrt{2}$ może oznaczać długość boku pewnego kwadratu, a to nadaje już w naszych oczach symbolowi $\sqrt{2}$ charakter liczby.

Przyjmujemy więc, że symbol $\sqrt{2}$, a także symbole $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ itp. oznaczają liczby nowego rodzaju i liczby te nazywamy **niewymiernymi** w odróżnieniu od znanych nam dotychczas liczb całkowitych i ułamkowych, którym nadajemy teraz wspólne miano liczb **wymiernych.**

Liczba niewymierna nie jest ułamkiem, a więc nie możemy przedstawić jej w postaci liczby dziesiętnej. Możemy natomiast zawsze wyznaczyć liczbę dziesiętną, która od danej liczby niewymiernej różni się dowolnie mało. Pokażemy to na przykładzie $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ jest oczywiście liczbą większą od 1, lecz mniejszą od 2, gdyż $1^2 = 1$ a $2^2 = 4$. Zapiszemy to krótko tak:

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

gdyż

$$1^2 < 2 < 2^2$$

Aby otrzymać przybliżenie liczby $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,1, obliczamy kwadraty liczb

$$1{,}1, \quad 1{,}2, \quad 1{,}3, \quad \ldots, \quad 1{,}9$$

Mamy

$$1{,}1^2 = 1{,}21$$
$$1{,}2^2 = 1{,}44$$
$$1{,}3^2 = 1{,}69$$
$$1{,}4^2 = 1{,}96$$
$$1{,}5^2 = 2{,}25$$

Widzimy, że

$$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$$

Wobec tego

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

Zatem $\sqrt{2}$ jest większy od 1,4, lecz mniejszy od 1,5. Możemy więc napisać

$\sqrt{2} \approx 1{,}4$ z dokładnością do 0,1 z niedomiarem

lub $\sqrt{2} \approx 1{,}5$ z dokładnością do 0,1 z nadmiarem.

Chcąc otrzymać $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,01, podnosimy do kwadratu liczby

$$1{,}41, \quad 1{,}42, \quad 1{,}43, \quad \ldots, \quad 1{,}49$$

Otrzymujemy

$$1{,}41^2 = 1{,}9881$$
$$1{,}42^2 = 2{,}0164$$

Widzimy, że

$$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$$

Zatem

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

Oznacza to, że 1,41 (lub 1,42) przedstawia liczbę $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,01.

Postępując podobnie dalej, otrzymalibyśmy

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$$
$$1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$$

itd.

Liczby

$$1, \quad 1{,}4, \quad 1{,}41, \quad 1{,}414, \quad 1{,}4142, \quad 1{,}41421, \quad \ldots$$

przedstawiają $\sqrt{2}$ z coraz to większą dokładnością a mianowicie z dokładnością do 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 itd.

W podobny sposób można obliczać przybliżenia dziesiętne liczb $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ itp. Opisane postępowanie wymaga jednak, jak widzieliśmy, wielu prób połączonych z uciążliwymi rachunkami. W przyszłości będziemy używać innego, znacznie szybszego sposobu, który poznamy w lekcji następnej.

Uwaga 1. Nie należy sądzić, że liczby niewymierne są liczbami „niedokładnymi". Przeciwnie, np. $\sqrt{5}$ jest w zupełności określoną liczbą, mianowicie tą jedyną liczbą dodatnią, której kwadrat równa się 5.

Uwaga 2. Więcej wiadomości o liczbach niewymiernych zdobędziecie w lekcji 18. Dziś wspomnimy jeszcze, że liczby wymierne i liczby niewymierne mają wspólną nazwę **liczb rzeczywistych.**

Uwaga 3. Czy zdajecie sobie sprawę, że na dzisiejszej lekcji dokonaliście odkrycia nowych liczb?

Pytania

1. W jaki sposób wykazaliśmy, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą całkowitą ani ułamkową?
2. Jak nazwaliśmy liczby wyrażone symbolami $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ itp.?
3. Co to są liczby wymierne?
4. Jaką wspólną nazwę nadajemy liczbom wymiernym i niewymiernym?

Zadania

1. Wykazać, że symbol $\sqrt{5}$ nie oznacza liczby całkowitej ani ułamkowej.

2. Obliczyć $\sqrt{7}$ z dokładnością do 0,01.

3. Przyjmując, że w przybliżeniu $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, $\sqrt{5} \approx 2{,}24$, $\sqrt{6} \approx 2{,}45$, $\sqrt{8} \approx 2{,}83$, obliczyć:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, b) $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$, c) $\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}$

d) $7\sqrt{2}-5\sqrt{3}$, e) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$, f) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Odpowiedzi

2. 2,64 lub 2,65. 3. e) 3,99

LEKCJA 3

Obliczanie arytmetycznego pierwiastka kwadratowego

Nauczymy się teraz obliczać (dokładną lub przybliżoną) wartość arytmetycznego pierwiastka kwadratowego. Rozpoczniemy od przypadku, gdy pod znakiem pierwiastka znajduje się liczba będąca kwadratem liczby całkowitej.

Nietrudno zauważyć, że:

kwadraty liczb 1-cyfrowych są 1- lub 2-cyfrowe,
kwadraty liczb 2-cyfrowych są 3- lub 4-cyfrowe,
kwadraty liczb 3-cyfrowych są 5- lub 6-cyfrowe itd.

Na przykład:

$3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $27^2 = 729$, $37^2 = 1369$,
$300^2 = 90000$, $907^2 = 822649$.

Stąd odwrotnie:

Pierwiastek kwadratowy z liczby 1- lub 2-cyfrowej jest 1-cyfrowy.

Pierwiastek kwadratowy z liczby 3- lub 4-cyfrowej jest 2-cyfrowy.

Pierwiastek kwadratowy z liczby 5- lub 6-cyfrowej jest 3-cyfrowy itd.

$\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{729} = 27$, $\sqrt{1369} = 37$, $\sqrt{40000} = 200$, $\sqrt{822649} = 907$.

Przykład 1.

Zobaczymy teraz, jak można — bez zgadywania — obliczyć wartość $\sqrt{1369}$.

Ponieważ liczba 1369 jest czterocyfrowa, przeto wartość $\sqrt{1369}$ jest dwucyfrowa. Ponieważ dalej liczba 1369 zawiera się między liczbami 900 i 1600, przeto $\sqrt{1369}$ zawiera się między liczbami 30 i 40, wobec czego możemy napisać

$$\sqrt{1369} = 30 + x \tag{I}$$

gdzie x oznacza liczbę dodatnią mniejszą od 10.

Zgodnie z określeniem pierwiastka kwadratowego z równania (I) wynika równanie kwadratowe

$$(30+x)^2 = 1369 \tag{II}$$

które rozwiążemy w sposób przybliżony. W tym celu przekształcamy je najpierw jak niżej

$$900+2\cdot 30x+x^2 = 1369$$
$$2\cdot 30x+x^2 = 1369-900$$
$$(2\cdot 30+x)x = 1369-900$$
$$(2\cdot 30+x)x = 469 \tag{III}$$

$$x = \frac{469}{2\cdot 30+x} \tag{IV}$$

Następnie liczbę x występującą w mianowniku po prawej stronie równania (IV) opuszczamy i otrzymujemy

$$x \approx \frac{469}{60} = 7\frac{49}{60} \approx 7$$

Z łatwością stwierdzamy, że liczba 7 spełnia równanie (III). Istotnie

$$(2\cdot 30+7)\cdot 7 = 67\cdot 7 = 469$$

Zatem zgodnie z równaniem (I)

$$\sqrt{1369} = 30+7 = 37$$

Uwaga. Pominięcie dodatniej liczby x w mianowniku ułamka (IV) zmniejszyło ten mianownik, a to z kolei spowodowało zwiększenie wartości ułamka. Zwiększenie to jest jednakże nieznaczne, gdyż x jako liczba jednocyfrowa jest niewielka w porównaniu z dwucyfrową liczbą 60. Dlatego wystarczyło zamiast ułamka $\frac{469}{60}$, czyli zamiast liczby mieszanej $7\frac{49}{60}$, przyjąć w wyniku liczbę całkowitą 7 i już znaliśmy dokładne rozwiązanie równania (II). W niektórych jednakże przypadkach uzyskana w analogiczny sposób liczba całkowita może się okazać jeszcze za duża. Wówczas dla otrzymania

właściwej wartości x trzeba przyjąć liczbę całkowitą odpowiednio mniejszą.

Wróćmy teraz znowu do naszego przykładu. Zauważmy, że obliczanie wartości $\sqrt{1369}$ można sprowadzić do następujących działań:

1. Znaleźć liczbę 30 jako przybliżenie (do jednej dziesiątki) wartości $\sqrt{1369}$.

2. Liczbę 30 podnieść do kwadratu i wynik 900 odjąć od liczby podpierwiastkowej 1369.

3. Resztę 469 podzielić przez podwojoną liczbę 30, czyli przez 60, i otrzymaną po zaokrągleniu ilorazu liczbę 7 dodać do 30. Suma 37 będzie szukaną wartością $\sqrt{1369}$.

4. Dla sprawdzenia wykonać mnożenie $(60+7)\cdot 7$. Wynik tego mnożenia porównać z liczbą 469.

Powyższe działania można by zapisywać stopniowo w następujący sposób:

$\sqrt{1369} = 30+?$ $\qquad$ $\sqrt{1369} = 30+?$ $\qquad$ $\sqrt{1369} = 30+7$

$\begin{array}{r} 900 \\ \hline 469 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 900 & \\ \hline 469 & 60 \end{array}$

$\sqrt{1369} = 37$

$\begin{array}{r|l} 900 & \\ \hline 469 & (60+7)\cdot 7 \\ 469 & \\ \hline 0 & \end{array}$

Przyglądając się temu zapisowi, dostrzegamy możliwość wprowadzenia pewnych uproszczeń. Widzimy mianowicie, że liczba podpierwiastkowa 1369 zawiera 13 pełnych setek, a wynik 37 zawiera 3 pełne dziesiątki, oraz to, że

$\sqrt{13} \approx 3$ z dokładnością do 1 z niedomiarem.

Oznacza to, że cyfrę dziesiątek wyniku można otrzymać, obliczając część całkowitą pierwiastka kwadratowego z liczby setek liczby podpierwiastkowej.

Zapiszmy to tak:

$$\sqrt{13'69} = 3\cdot$$

Kreseczka między cyframi liczby podpierwiastkowej oddziela liczbę

setek, a kropka po prawej stronie znaku równości przypomina, że trzeba jeszcze obliczyć cyfrę jednostek.

Z kolei 3 dziesiątki podnieśmy do kwadratu i otrzymaną liczbę 9 setek odejmijmy od 13 setek.

$$\begin{array}{l}\sqrt{13'69} = 3\cdot \\ \quad 9 \\ \hline \quad 4\end{array}$$

Do reszty 4 dopiszemy teraz 69 jedności i w otrzymanej w ten sposób liczbie 469 oddzielmy kreseczką ostatnią cyfrę. Powstałą liczbę 46 dziesiątek podzielmy przez podwojoną ilość dziesiątek wyniku, czyli przez 6.

$$\begin{array}{l}\sqrt{13'69} = 3\cdot \\ \quad 9 \\ \hline 46'9 \mid 6\end{array}$$

Zaokrąglony do całości iloraz 46 : 6, tzn. liczbę 7, dopiszmy obok 6 dziesiątek (odpowiada to dodawaniu 60+7) i powstałą w ten sposób liczbę 67 pomnóżmy przez 7.

$$\begin{array}{l}\sqrt{13'69} = 3\cdot \\ \quad 9 \\ \hline 46'9 \mid 67\cdot 7\end{array}$$

Iloczyn $67\cdot 7$ jest równy 469, co oznacza, że 7 jest szukaną cyfrą jedności wyniku. Wobec tego cyfrę 7 wpisujemy obok 3 na miejsce kropki i uzupełniamy zapis jak niżej:

$$\begin{array}{l}\sqrt{13'69} = 37 \\ \quad 9 \\ \hline 46'9 \mid 67\cdot 7 \\ 46\ 9 \mid \\ \hline \quad 0\end{array}$$

Przykład 2. Obliczyć $\sqrt{1849}$.

Prześledźcie uważnie kolejne fazy rachunku.

I. $\sqrt{18'49} = 4\cdot$

II. $\begin{array}{l}\sqrt{18'49} = 4\cdot \\ \quad 16 \\ \hline \quad 2\end{array}$

III. $\begin{array}{l}\sqrt{18'49} = 4\cdot \\ \quad 16 \\ \hline 24'9 \mid 8\end{array}$

IV. $\sqrt{18'49} = 4 \cdot$

16	
24'9	$83 \cdot 3$

V. $\sqrt{18'49} = 43$

16	
24'9	$83 \cdot 3$
24 9	
9	

Przykład 3. Obliczyć $\sqrt{729}$.

W rozwiązaniu nie pokazujemy już kolejnych faz.

$\sqrt{7'29} = 27$

4	
32'9	$47 \cdot 7$
32 9	
0	

Sprawdzenie:

$27^2 = 729$

Przeróbcie ten przykład samodzielnie!

Uwaga. Gdy liczba podpierwiastkowa nie jest pełnym kwadratem, wówczas objaśnione wyżej postępowanie prowadzi do obliczenia przybliżonej wartości pierwiastka kwadratowego.

Na przykład:

$\sqrt{12'34} \approx 35$

9	
33'4	$65 \cdot 5$
32 5	
9	

Jak widać, pozostaje reszta 9, wobec czego $\sqrt{1234}$ tylko w przybliżeniu równa się 35.

Przykład 4. Obliczyć $\sqrt{60516}$.

Rozwiązanie. Dotychczas obliczaliśmy pierwiastki kwadratowe z liczb 3-cyfrowych i 4-cyfrowych, teraz mamy pod znakiem pierwiastka liczbę 5-cyfrową. Postępujemy podobnie jak wyżej.

Dzielimy liczbę podpierwiastkową na tzw. klasy, odcinając po dwie cyfry kolejno od prawej strony

$\sqrt{6'05'16}$

po czym obliczenia rozpoczynamy tak, jak gdyby pod znakiem pier-

wiastka znajdowała się liczba trzycyfrowa 605.

$$\sqrt{6'05'16} = 24 \cdot$$
$$4$$
$$\overline{2\,0'5} \mid 44 \cdot 4$$
$$1\,7\,6$$
$$\overline{\quad 2\,9}$$

Do reszty 29 dopisujemy teraz ostatnią klasę 16 i w powstałej liczbie 2916 odcinamy ostatnią cyfrę

$$\sqrt{6'05'16} = 24 \cdot$$
$$4$$
$$\overline{2\,0'5} \mid 44 \cdot 4$$
$$1\,7\,6$$
$$\overline{\quad 2\,9\,1'6}$$

Liczbę 24 stojącą po prawej stronie znaku równości podwajamy*) i otrzymaną liczbę 48 piszemy obok liczby 2916 jak niżej

$$\sqrt{6'05'15} = 24 \cdot$$
$$4$$
$$\overline{2\,0'5} \mid 44 \cdot 4$$
$$1\,7\,6$$
$$\overline{\quad 2\,9\,1'6} \mid 48$$

Liczbę 291 dzielimy przez 48, otrzymujemy 6. Cyfrę 6 dopisujemy obok liczby 48; powstałą liczbę 486 trzeba pomnożyć przez 6.

$$\sqrt{6'05'16} = 24 \cdot$$
$$4$$
$$\overline{2\,0'5} \mid 44 \cdot 4$$
$$1\,7\,6$$
$$\overline{\quad 2\,9\,1'6} \mid 486 \cdot 6$$

*) Zamiast podwajać liczbę 24 można dodać liczby 44 i 4.

Wykonujemy mnożenie $486 \cdot 6$ i otrzymany iloczyn podpisujemy pod liczbą 2916

$$\sqrt{6'05'16} = 246$$

4	
20'5	$44 \cdot 4$
17 6	
2 91'6	$486 \cdot 6$
2 91 6	
0	

Ponieważ reszta równa się 0, przeto cyfrę 6 dopisujemy do cyfr 24 na miejsce kropki.

Zatem $\sqrt{60516} = 246$

Przykład 5. Obliczyć a) $\sqrt{931225}$ b) $\sqrt{11916304}$.

Rozwiązanie

$\sqrt{93'12'25} = 965$

81	
121'2	$186 \cdot 6$
111 6	
9 62'5	$1925 \cdot 5$
9 62 5	
0	

$\sqrt{11'91'63'04} = 3452$

9	
29'1	$64 \cdot 4$
25 6	
356'3	$685 \cdot 5$
342 5	
13 80'4	$6902 \cdot 2$
13 80 4	
0	

Przeprowadźcie te rachunki samodzielnie!

Uwaga. Przejrzyjcie wszystkie przerobione w tej lekcji przykłady i zauważcie, że w wyniku pierwiastkowania otrzymuje się liczbę złożoną z tylu cyfr, ile klas zawiera liczba podpierwiastkowa.

Zadania

1. Obliczyć i sprawdzić:

a) $\sqrt{576}$ b) $\sqrt{3844}$ c) $\sqrt{73984}$

d) $\sqrt{132496}$ e) $\sqrt{5527201}$ f) $\sqrt{66797929}$

2. Obliczyć bok kwadratu o polu:

a) 784 cm^2 b) 31 dm^2 36 cm^2 c) 83 m^2 17 dm^2 44 cm^2

d) 580,81 a*) e) 93,1225 ha

Odpowiedzi

1. a) 24, b) 62, c) 272, d) 364, e) 2351, f) 8173,
2. a) 28 cm, b) 56 cm, c) 912 cm, d) 241 m, e) 965 m.

LEKCJA 4

Obliczanie arytmetycznego pierwiastka kwadratowego cd.

Przykład 1. Obliczyć $\sqrt{676000000}$.

Rozwiązanie

$$\sqrt{6'76'00'00'00} = 26\,000$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & \\ \hline 27'6 & 46\cdot 6 \\ 27\ 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Po cyfrach 26 dopisaliśmy w wyniku 3 zera, pamiętając, że z każdej klasy liczby podpierwiastkowej otrzymujemy jedną cyfrę wartości pierwiastka.

Sprawdzenie: $26\,000^2 = 676\,000\,000$.

Przykład 2. Obliczyć $\sqrt{162409}$.

Rozwiązanie

$$\sqrt{16'24'09} = 4\cdot\cdot$$

$$\begin{array}{r|l} 16 & \\ \hline 2'4 & 8 \end{array}$$

Po „odcięciu" cyfry 4 otrzymaliśmy liczbę 2 mniejszą od dzielnika 8. Wobec tego po prawej stronie znaku równości za cyfrą 4

*) a jest skrótem słowa ar; 1 ar = 100 m^2.

(na miejsce pierwszej kropki) wpisujemy 0, a na dole schematu do liczby 24 dopisujemy ostatnią klasę 09

$$\sqrt{16'24'09} = 40\cdot$$

$$\begin{array}{l} 16 \\ \hline 2'4 \mid 8 \\ \hline 2\,40'9 \mid \end{array}$$

Liczbę 40 podwajamy: $2 \cdot 40 = 80$. Liczbę 80 piszemy obok liczby 2409, dzielimy 240 przez 80 itd.

$$\sqrt{16'2\,4'09} = 403$$

$$\begin{array}{l} 16 \\ \hline 2'4 \mid 8 \\ \hline 2\,40'9 \mid 803\cdot 3 \\ 2\,40\,9 \mid \\ \hline 0 \end{array}$$

Sprawdzenie: $403^2 = 162409$

Przykład 3. Obliczyć $\sqrt{15{,}0544}$

Rozwiązanie. Przedstawiamy dane wyrażenie w postaci

$$\sqrt{15{,}0544} = \sqrt{\frac{150544}{10000}} = \frac{\sqrt{150544}}{\sqrt{10000}}$$

i obliczamy oddzielnie pierwiastki z licznika i mianownika

$$\sqrt{15'05'44} = 388 \qquad \sqrt{10000} = 100$$

$$\begin{array}{l} 9 \\ \hline 6\,0'5 \mid 68\cdot 8 \\ 5\,4\,4 \mid \\ \hline 6\,14'4 \mid 768\cdot 8 \\ 6\,14\,4 \mid \\ \hline 0 \end{array}$$

Zatem $$\sqrt{15{,}0544} = \frac{388}{100} = 3{,}88$$

Ten sam wynik można otrzymać prościej, postępując jak niżej

$$\sqrt{15'05'44} = 3{,}88$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & \\ \hline 6\,0'5 & 68 \cdot 8 \\ 5\,4\,4 & \\ \hline 6\,14'4 & 768 \cdot 8 \\ 6\,14\,4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Przykład 4. Obliczyć $\sqrt{0{,}00007056}$

Rozwiązanie

$$\sqrt{0',00'00'70'56} = 0{,}0084$$

$$\begin{array}{r|l} 64 & \\ \hline 6\,5'6 & 164 \cdot 4 \\ 6\,5\,6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Uwaga. Trzy pierwsze (licząc od lewa) klasy zawierają same zera; z każdej z tych klas otrzymujemy w wyniku pierwiastkowania po jednym zerze.

Przykład 5. Obliczyć $\sqrt{22{,}5}$ z dokładnością do 0,001.

Rozwiązanie. W wyniku pierwiastkowania mamy otrzymać trzy cyfry po przecinku. Wobec tego w liczbie podpierwiastkowej po cyfrze 5 dopisujemy 5 zer (żeby po przecinku mieć trzy klasy). Dopisanie tych zer nie zmieni oczywiście wartości liczby podpierwiastkowej.

$$\sqrt{22{,}5} = \sqrt{22{,}500000}$$

$$\sqrt{22',50'00'00} \approx 4{,}743$$

$$\begin{array}{r|l} 16 & \\ \hline 65'0 & 87 \cdot 7 \\ 60\,9 & \\ \hline 4\,10'0 & 944 \cdot 4 \\ 3\,77\,6 & \\ \hline 32\,40'0 & 9483 \cdot 3 \\ 28\,44\,9 & \\ \hline 3\,95\,1 & \end{array}$$

Zatem $\sqrt{22{,}5} \approx 4{,}743$ z dokładnością do 0,001.

Uwaga. Gdy pod znakiem pierwiastka mamy liczbę dziesiętną, wówczas przy podziale na klasy pierwszą kreskę stawiamy między cyframi rozdzielonymi przecinkiem dziesiętnym, a następnie, od tego miejsca zaczynając, odcinamy kolejno po dwie cyfry w lewo i w prawo. Np. w wyrażeniu $\sqrt{234{,}81756}$ podział liczby podpierwiastkowej na klasy przedstawia się tak:

$$\sqrt{2'34',81'75'6}$$

Jeśli, jak w tym przypadku, w ostatniej (z prawej strony) klasie znajduje się tylko jedna cyfra, uzupełniamy tę klasę zerem:

$$\sqrt{2'34',81'75'60}$$

Przykład 6. Obliczyć $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,0001.

Rozwiązanie. Pod znakiem pierwiastka po cyfrze 2 stawiamy przecinek dziesiętny i dopisujemy 8 zer (żeby po przecinku mieć 4 klasy).

$$\sqrt{2} = \sqrt{2{,}000\,000\,00}$$

$$\sqrt{2',00'00'00'00} \approx 1{,}4142$$

1	
10'0	$24 \cdot 4$
96	
40'0	$281 \cdot 1$
28 1	
11 90'0	$2824 \cdot 4$
11 29 6	
60 40'0	$28282 \cdot 2$
56 56 4	
3 83 6	

Zatem $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ z dokładnością do 0,0001 (z niedomiarem).

Przybliżenie do 0,0001 z nadmiarem wynosi oczywiście 1,4143. Które z tych przybliżeń jest dokładniejsze? Łatwo się o tym przekonać, obliczając piątą cyfrę po przecinku. Cyfrą tą jest 1, a więc dokładniejsze jest przybliżenie z niedomiarem.

Uwaga 1. O poprawności zastosowanego w tym przykładzie postępowania możemy łatwo się przekonać, przedstawiając $\sqrt{2}$ w postaci

$$\sqrt{\frac{200000000}{100000000}} = \frac{\sqrt{200000000}}{\sqrt{100000000}}$$

i obliczając oddzielnie pierwiastki z licznika i z mianownika. Otrzymalibyśmy

$$\sqrt{200000000} \approx 14142 \qquad \sqrt{100000000} = 10000$$

a stąd

$$\sqrt{2} \approx \frac{14142}{10000} = 1{,}4142$$

Uwaga 2. Wynik ten znamy już z lekcji 2 (str. 15), teraz jednak otrzymaliśmy go znacznie prościej.

Zadania

1. Obliczyć i sprawdzić:

a) $\sqrt{18490000}$ b) $\sqrt{252004}$ c) $\sqrt{924464025}$

d) $\sqrt{4{,}84}$ e) $\sqrt{11{,}6964}$ f) $\sqrt{404{,}01}$

g) $\sqrt{0{,}2209}$ h) $\sqrt{0{,}006724}$ i) $\sqrt{0{,}00000784}$

2. Obliczyć z dokładnością do dwóch miejsc dziesiętnych:

a) $\sqrt{14}$ *b) $\sqrt{23}$ *c) $\sqrt{450}$

3. Obliczyć z dokładnością do trzech miejsc po przecinku:

a) $\sqrt{3{,}267}$ *b) $\sqrt{25{,}44}$ *c) $\sqrt{148{,}5}$

4. Obliczyć z dokładnością do trzech miejsc po przecinku:

a) $\sqrt{\frac{4}{5}}$ *b) $\sqrt{\frac{5}{8}}$ *c) $\sqrt{\frac{7}{15}}$ *d) $\sqrt{\frac{7}{22}}$

Odpowiedzi

1. a) 4300, b) 502, c) 30405, d) 2,2, e) 3,42, f) 20,1, g) 0,47, h) 0,082. i) 0,0028, **2.** a) 3,74, b) 4,79. c) 21,21. **3.** a) 1,807, b) 5,043, c) 12,186. **4.** Wskazówka. Zamienić ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne. a) 0,894, b) 0,790, c) 0,683, d) 0,564.

LEKCJA 5

Pierwiastki o wykładnikach naturalnych *) i ich własności

W poprzednich lekcjach zajmowaliśmy się pierwiastkami kwadratowymi. Obecnie poznamy pierwiastki wyższych stopni.

Pierwiastkiem sześciennym lub pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby a nazywamy liczbę, której sześcian równa się a.

Na przykład:

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z 8 jest 2, bo $2^3 = 8$.

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z -27 jest -3, bo $(-3)^3 = -27$.

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z 0 jest 0, bo $0^3 = 0$.

Pierwiastkiem czwartego stopnia z liczby a nazywamy liczbę, której czwarta potęga równa się a.

Na przykład.

Pierwiastkami czwartego stopnia z liczby 16 są liczby 2 i -2, gdyż $2^4 = 16$ i $(-2)^4 = 16$.

Pierwiastek czwartego stopnia z 0 równa się 0, gdyż $0^4 = 0$.

Pierwiastek czwartego stopnia z liczby -16 nie istnieje, gdyż nie znamy liczby, której czwarta potęga byłaby liczbą ujemną.

Ogólnie, jeżeli n oznacza dowolną liczbę naturalną, to **pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby a nazywamy liczbę, której n-ta potęga równa się a.**

Oto dalsze przykłady:

Pierwiastkiem 5-tego stopnia z 32 jest 2, gdyż $2^5 = 32$.

Pierwiastkiem 5-tego stopnia z -32 jest -2, gdyż $(-2)^5 = -32$.

Pierwiastkiem 5-tego stopnia z 0 jest 0, gdyż $0^5 = 0$.

---

*) Liczby naturalne są to liczby całkowite dodatnie, np.: 1, 2, 3, 4, 5 ...

Pierwiastkami 6-tego stopnia z liczby 729 są liczby 3 i -3, bo $3^6 = 729$ i $(-3)^6 = 729$.

Pierwiastkiem 6-tego stopnia z 0 jest 0, bo $0^6 = 0$.

Pierwiastek 6-tego stopnia z liczby -64 nie istnieje, gdyż nie znamy takiej liczby, której szósta potęga byłaby liczbą ujemną.

Powyższe przykłady nasuwają następujące przypuszczenia, których ogólną prawdziwość przyjmujemy bez dowodu.

1. Każda liczba: dodatnia, ujemna lub zero ma jeden i tylko jeden pierwiastek stopnia nieparzystego.

2. Każda liczba dodatnia ma dwa pierwiastki stopnia parzystego; pierwiastki te mają jednakowe wartości bezwzględne, lecz różnią się znakiem.

3. Pierwiastki stopnia parzystego z liczb ujemnych nie istnieją.

4. Pierwiastek każdego stopnia z zera równa się zeru.

Oznaczanie pierwiastka

Gdy liczba a ma tylko jeden pierwiastek n-tego stopnia (to jest gdy n jest nieparzyste lub a równa się 0), wówczas ten pierwiastek oznaczamy:

$$\sqrt[n]{a}$$

Gdy natomiast liczba a ma dwa pierwiastki (tj. gdy a jest liczbą dodatnią, a n jest parzyste), wówczas symbol powyższy oznacza **dodatni pierwiastek** n-tego stopnia z liczby a.

Przykłady

$$\sqrt[3]{8} = 2,\ \sqrt[5]{-32} = -2,\ \sqrt[4]{625} = 5,\ \sqrt[6]{1} = 1,\ \sqrt[n]{0} = 0$$

Gdy liczba a jest ujemna, n zaś jest parzyste, wówczas a nie ma pierwiastka n-tego stopnia. Zatem symbol $\sqrt[n]{a}$ w tym przypadku nic nie oznacza.

Np. symbole $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt{-256}$ nic nie oznaczają.

W symbolu $\sqrt[n]{a}$ występują dwie liczby: n i a; pierwszą z nich nazywamy **stopniem lub wykładnikiem pierwiastka,** drugą nazywamy **liczbą podpierwiastkową.**

Uwaga 1. Symbol $\sqrt[2]{a}$ oznacza to samo co $\sqrt{a}$. Symbol $\sqrt[1]{a}$ oznacza liczbę a.

Uwaga 2. Gdy pierwiastek n-tego stopnia z a istnieje, wówczas zachodzi równość

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Na przykład: $\left(\sqrt[4]{81}\right)^4 = 81$

Uwaga 3. Z rozważań tej lekcji wynika, że każda liczba dodatnia ma tylko jeden dodatni pierwiastek stopnia n (n naturalne). Ten jedyny **dodatni pierwiastek z liczby dodatniej a nazywamy pierwiastkiem arytmetycznym n-tego stopnia z liczby a.** Pierwiastek z 0 również nazywamy pierwiastkiem arytmetycznym.

Uwaga 4. Wśród pierwiastków o wykładnikach naturalnych spotykamy wiele liczb niewymiernych. Np. $\sqrt[3]{7}$ jest liczbą niewymierną. Stosując metodę prób (patrz str. 15), można wykazać, że $\sqrt[3]{7} \approx 1{,}9129$.

Wzmianka historyczna

Znak pierwiastka $\sqrt{\ }$ jest zniekształconą literą r, pierwszą literą łacińskiego słowa *radix*, co znaczy „pierwiastek". Znak ten został wprowadzony do matematyki przez Rudolfa w r. 1525. Poprzednio pisano po prostu całe słowo *radix*.

Pytania

1. Co nazywamy pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby a?
2. Co nazywamy arytmetycznym pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby dodatniej a?
3. Co oznacza symbol $\sqrt[n]{a}$ w przypadku, gdy wykładnik n jest nieparzysty?
4. Co oznacza symbol $\sqrt[n]{a}$ w przypadku, gdy wykładnik n jest parzysty, a liczba podpierwiastkowa a jest dodatnia?
5. Dlaczego pierwiastki stopnia parzystego z liczb ujemnych nie istnieją?

Zadania

1. Obliczyć i sprawdzić:

a) $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{-125}$, $\sqrt[3]{216}$

b) $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt[3]{-1000000}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$, $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}$, $\sqrt[3]{\frac{343}{512}}$

c) $\sqrt[3]{0{,}001}$, $\sqrt[3]{-0{,}027}$, $\sqrt[3]{-0{,}216}$, $\sqrt[3]{0{,}000125}$

d) $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[4]{256}$, $\sqrt[4]{10000}$

e) $\sqrt[4]{0{,}0016}$, $\sqrt[4]{0{,}0625}$, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$, $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$

f) $\sqrt[5]{-1}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[5]{-0{,}00243}$, $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

g) $\sqrt[6]{1}$, $\sqrt[7]{-128}$, $\sqrt[8]{256}$, $\sqrt[8]{\frac{1}{256}}$

2. Rozwiązać równania:

a) $x^3 = 8$ b) $x^3 = -8$ *c) $3x^3 = 375$

d) $x^4 = 81$ *e) $5x^5 = -160$ *f) $81x^4 = 1$

3. Obliczyć krawędź sześcianu, którego objętość wynosi:

a) 27 cm³ b) 125 cm³ *c) 216 cm³ *d) 1000 cm³

4. Które z poniższych symboli nie mają sensu liczbowego:

a) $\sqrt[3]{-2}$ b) $\sqrt[4]{15}$ c) $\sqrt[4]{-81}$ d) $\sqrt[5]{-\frac{1}{3}}$

e) $\sqrt[6]{-64}$ f) $\sqrt[7]{-0{,}02}$ g) $\sqrt[8]{3{,}22}$ h) $\sqrt[10]{-1}$

5. Przedstawić w prostszej postaci:

a) $(\sqrt[3]{5})^3$ b) $(\sqrt[4]{7})^4$ c) $(\sqrt[5]{9})^5$

d) $\sqrt[3]{7^3}$ e) $(3\sqrt[4]{2})^4$ f) $(2\sqrt[5]{2})^5$

6. Która z liczb jest większa:

a) $2\sqrt[3]{5}$, 3 b) $3\sqrt[4]{2}$, $2\sqrt[4]{3}$

c) $3\sqrt[5]{4}$, $2\sqrt[5]{8}$ d) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}$

e) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}$ *f) $\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$, $\frac{3}{2}$

Odpowiedzi

2. a) 2, b) -2, c) 5, d) 3 i -3, e) -2, f) $\frac{1}{3}$ i $-\frac{1}{3}$.

4. Symbole $\sqrt[4]{-81}$, $\sqrt[6]{-64}$, $\sqrt[10]{-1}$ nie mają sensu liczbowego.

5. d) 7, e) 162, f) 64. **6.** Wskazówka. Podnieść obie liczby do odpowiedniej potęgi, np. w przykładzie a) do potęgi trzeciej.

a) $2\sqrt[3]{5} > 3$, b) $3\sqrt[4]{2} > 2\sqrt[4]{3}$, c) $3\sqrt[5]{3} > 2\sqrt[5]{8}$, d) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} > \frac{2}{3}$

e) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$, f) $\sqrt[4]{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}$.

LEKCJA 6

Zadania różne

Przykład 1. Obliczyć $\sqrt[5]{7776}$, rozkładając liczbę podpierwiastkową na czynniki pierwsze.

Rozwiązanie. Rozkładając w znany sposób liczbę 7776 na czynniki pierwsze, otrzymujemy (sprawdźcie!):

$$7776 = 2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$$

Zatem $$\sqrt[5]{7776} = \sqrt[5]{6^5} = 6$$

Uwaga. W lekcji 3 poznaliśmy łatwy sposób obliczania wartości pierwiastków kwadratowych z liczb dodatnich. W odniesieniu do pierwiastków wyższych stopni nie możemy niestety podać Wam równie prostego i ogólnego sposobu.

Przykład 2*. Stosując „metodę prób", obliczyć $\sqrt[3]{11}$ z dokładnością do 0,01.

Rozwiązanie. „Metodę prób" poznaliśmy już w lekcji 2 przy obliczaniu przybliżonej wartości $\sqrt{2}$. Tutaj postąpimy podobnie.

Wiemy, że $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, a ponieważ

$$8 < 11 < 27$$

przeto

$$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{11} < \sqrt[3]{27}$$

czyli

$$2 < \sqrt[3]{11} < 3$$

Widzimy, że wartość $\sqrt[3]{11}$ jest większa od 2, lecz mniejsza od 3.

Obliczamy teraz

$$2{,}1^3 \; 2{,}2^3, \; 2{,}3^3, \; \ldots$$

Otrzymujemy

$$2{,}1^3 = 9{,}261, \; 2{,}2^3 = 10{,}648, \; 2{,}3^3 = 12{,}167$$

Mamy

$$10{,}648 < 11 < 12{,}167$$

czyli

$$2{,}2^3 < 11 < 2{,}3^3$$

przeto

$$2{,}2 < \sqrt[3]{11} < 2{,}3$$

Z kolei obliczamy

$$2{,}21^3, \; 2{,}22^3, \; 2{,}23^3, \; \ldots.$$

Otrzymujemy

$$2{,}21^3 = 10{,}793\,861$$
$$2{,}22^3 = 10{,}941\,048$$
$$2{,}23^3 = 11{,}089\,567$$

Widzimy, że

$$10{,}941\,048 < 11 < 11{,}089\,567$$

czyli

$$2{,}22^3 < 11 < 2{,}23^3$$

$$2{,}22 < \sqrt[3]{11} < 2{,}23$$

a więc

Oznacza to, że

$$\sqrt[3]{11} \approx 2{,}22 \text{ z niedomiarem}$$

$$\sqrt[3]{11} \approx 2{,}23 \text{ z nadmiarem}$$

Uwaga. Obliczanie wartości pierwiastków metodą prób jest bardzo uciążliwe. Dla ułatwienia rachunków podajemy na końcu książki tablicę pierwiastków trzeciego stopnia z liczb naturalnych od 1 do 100. Tablica zawiera również wartości pierwiastków kwadratowych z tych samych liczb. Przybliżenia liczb niewymiernych są podane w tej tablicy z dokładnością do 0,0001.

Przykład 3. Posługując się tablicą na str. 424, obliczyć wartość wyrażenia $\sqrt{\sqrt[3]{21}-\sqrt[3]{5}}$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Rozwiązanie. Ze wspomnianej tablicy odczytujemy, że

$$\sqrt[3]{21} \approx 2{,}7589, \quad \sqrt[3]{5} \approx 1{,}7100$$

zatem

$$\sqrt{\sqrt[3]{21}-\sqrt[3]{5}} \approx \sqrt{2{,}7589-1{,}7100} = \sqrt{1{,}0489}$$

Obliczamy

$$\sqrt{1',04'89} \approx 1{,}02$$

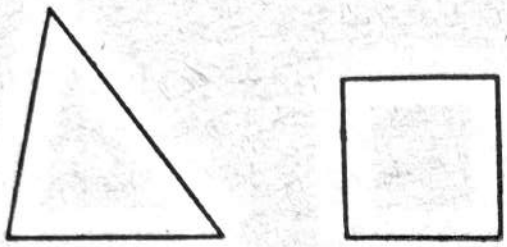
$$\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline 0'4 & 2 \\ \hline 4\,8'9 & 202 \cdot 2 \\ 4\,0\,4 & \\ \hline 8\,5 & \end{array}$$

Tak więc

$$\sqrt{\sqrt[3]{21}-\sqrt[3]{5}} \approx 1{,}02$$

Przykład 4. Trójkątną działkę gruntu o podstawie 99 m i wysokości 88 m zamieniono na działkę kwadratową o tym samym polu. Nową działkę ogrodzono płotem. Obliczyć długość płotu.

Rozwiązanie. Ze szkoły podstawowej pamiętamy, że pole trójkąta oblicza się, mnożąc podstawę przez pół wysokości. Zatem pole trójkątnej działki wynosi



Rys. 2

$$99 \text{ m} \cdot 44 \text{ m} = 4356 \text{ m}^2$$

Działka kwadratowa ma takie samo pole, oznaczając więc długość boku kwadratu przez x, mamy równość

$$x^2 = 4356 \text{ m}^2$$

(gdyż pole kwadratu równa się kwadratowi długości jego boku).

Z powyższej równości wynika, że

$$x = \sqrt{4356} \text{ m}$$

Obliczamy

$$\sqrt{43'56} = 66$$

$$\begin{array}{r|l} 36 & \\ \hline 75'6 & 126 \cdot 6 \\ 75\,6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Zatem

$$x = 66 \text{ m}$$

Jeśli bok kwadratu ma długość 66 m, to obwód kwadratu wynosi $4 \cdot 66 \text{ m} = 264 \text{ m}$.

Odpowiedź. Długość płotu wynosi 264 m.

Przykład 5. Obliczyć długość krawędzi sześcianu aluminiowego ważącego 1382,4 G. Ciężar właściwy aluminium wynosi $2{,}70 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$.

Rozwiązanie. Z fizyki wiemy, że ciężar właściwy D jakiegoś ciała jest to stosunek ciężaru P do objętości V tego ciała

$$D = \frac{P}{V}$$

Pomnóżmy obie strony tego wzoru przez V. Otrzymamy

$$D \cdot V = P$$

a stąd

$$V = \frac{P}{D}$$

Widzimy, że znając ciężar ciała i jego ciężar właściwy, możemy obliczyć objętość tego ciała. W naszym zadaniu

$$P = 1382{,}4\ \text{G} \qquad D = 2{,}70\ \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$$

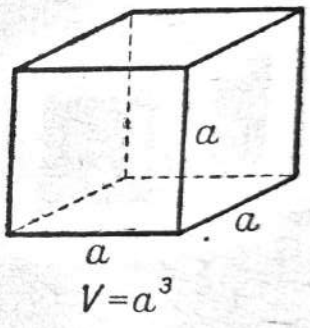
zatem

$$V = \frac{1382{,}4}{2{,}70} = 512\ \text{cm}^3$$

Sześcian aluminiowy, o którym mowa w zadaniu, ma objętość 512 cm³. Oznaczając krawędź sześcianu przez x, mamy równość

$$x^3 = 512\ \text{cm}^3$$

(gdyż objętość sześcianu równa się sześcianowi długości jego krawędzi — rys. 3).



Rys. 3

Z równości tej wynika, że

$$x = \sqrt[3]{512}\ \text{cm}$$

Rozkładając liczbę podpierwiastkową 512 na czynniki pierwsze, otrzymujemy

$$512 = 2^9 \text{ (sprawdźcie)}$$

Ale

$$2^9 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3$$

a więc

$$x = \sqrt[3]{8^3} = 8$$

Odpowiedź. Krawędź sześcianu ma długość 8 cm.

Zadania

1. Obliczyć:

a) $\sqrt[3]{4096}$ ***b)** $\sqrt[3]{13824}$ ***c)** $\sqrt[4]{1296}$

2. Posługując się tablicą pierwiastków sześciennych, obliczyć z dokładnością do trzech miejsc po przecinku:

a) $5\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{5}$ *b) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$ *d) $\sqrt{\sqrt[3]{23}+\sqrt[3]{17}}$

3. Prostokąt o bokach 7,8 cm i 4,3 cm zamieniono na kwadrat o tym samym polu. Obliczyć bok tego kwadratu z dokładnością do 0,1.

Uwaga. Jak zaznaczono w *Uwagach wstępnych* (str. 3), nie jest konieczne przepisywanie do zeszytu przedmiotowego pełnej treści zadania. Dobrze jest jednak zanotować ją w skrócie. W zadaniu 3 wyglądałoby to tak:

Długość prostokąta = 7,8 cm
Szerokość „ = 4,3 cm
Bok kwadratu o takim samym polu = x cm.

4. Obliczyć średnią geometryczną *) liczb 37 i 42 z dokładnością do 0,1.

*5. Bok dziesięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu R wyraża się wzorem

$$a=\frac{(\sqrt{5}-1)R}{2}.$$

Obliczyć a z dokładnością do 0,01 przy $R=1$.

*6. Bok ośmiokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu R wyraża się wzorem

$$a=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Obliczyć a z dokładnością do 0,01 dla $R=1$.

7. Obliczyć krawędź sześcianu, którego pole powierzchni całkowitej wynosi 403,44 dcm².

*8. Obliczyć krawędź sześcianu, którego objętość równa się objętości prostopadłościanu o wymiarach 8 cm, 12 cm, 18 cm.

---

*) Średnią geometryczną (lub średnią proporcjonalną) dwu liczb dodatnich a i b nazywamy liczbę $\sqrt{a\cdot b}$.

*9. Z wysokości 100 m puszczono swobodnie kamień. Jaką prędkość ma ten kamień w chwili uderzenia o ziemię?

*10. Dalekość horyzontu na morzu oblicza się za pomocą wzoru

$$d = 4{,}1\sqrt{h}$$

gdzie d oznacza dalekość horyzontu w kilometrach, h zaś jest wysokością oka obserwatora nad poziomem morza wyrażoną w metrach. Obliczyć z dokładnością do 1 km dalekość horyzontu, jeżeli

a) $h = 20$ m b) $h = 250$ m.

Odpowiedzi

1. a) 16, b) 24, c) 6. **2.** a) 9,720, b) 2,000, c) 1,348, d) 2,327 **3.** 5,8 cm. **4.** 39,4 **5.** 0,62. **6.** 0,77. **7.** 8,2. **8.** 12. **9.** $44{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{sek}}$, jeśli nie brać pod uwagę oporu powietrza. Wskazówka. Fizyka uczy, że prędkość ciała przy swobodnym spadaniu wyraża się wzorem $v = \sqrt{2gh}$, gdzie h jest wysokością wyrażoną w metrach, a $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{sek}^2}$ · **10.** a) 18 km, b) 65 km.

LEKCJE 7 i 8

Działania na pierwiastkach arytmetycznych

A. Pierwiastek arytmetyczny z iloczynu i z ilorazu

B. Iloczyn i iloraz pierwiastków arytmetycznych

Pierwiastkowanie jest działaniem odwrotnym względem potęgowania. Przed przystąpieniem do właściwego tematu lekcji powtórzymy z zakresu materiału kl. VIII reguły działań na potęgach.

1. Mnożenie potęg tej samej podstawy

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Aby pomnożyć potęgi tej samej podstawy, podnosimy wspólną podstawę do potęgi, której wykładnik równy jest sumie wykładników danych potęg.

2. Dzielenie potęg tej samej podstawy

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

gdzie $m > n$

Aby podzielić potęgi tej samej podstawy, podnosimy wspólną podstawę do potęgi, której wykładnik równy jest różnicy wykładników dzielnej i dzielnika.

3. Potęgowanie potęgi

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Aby potęgę podnieść do potęgi, podnosimy podstawę do potęgi, której wykładnik jest równy iloczynowi danych wykładników.

4. Potęgowanie iloczynu

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Aby iloczyn podnieść do potęgi, podnosimy do tej potęgi każdy czynnik iloczynu i otrzymane potęgi mnożymy.

5. Potęgowanie ułamka

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Aby ułamek podnieść do potęgi, podnosimy do tej potęgi licznik i mianownik ułamka.

Podamy również prawo, na które często będziemy powoływali się przy uzasadnianiu reguł pierwiastkowania.

Jeżeli dwie liczby dodatnie są równe, to ich n-te potęgi są równe, i odwrotnie, jeżeli n-te potęgi dwu liczb dodatnich są równe, to i te liczby są równe.

(6) Jeżeli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a = b$, to $a^n = b^n$ i odwrotnie
jeżeli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a^n = b^n$, to $a = b$

Obecnie przechodzimy do działań na pierwiastkach. Przypominamy, że z definicji pierwiastka arytmetycznego wynika bezpośrednio

$$(\sqrt{2})^2 = 2;\ (\sqrt[3]{5})^3 = 5;\ (\sqrt[4]{a})^4 = a \text{ i ogólnie}$$

(7) $$(\sqrt[n]{a})^n = a, \text{ gdzie } a > 0$$

Na podstawie wzoru (3) reguł potęgowania oraz definicji pierwiastka arytmetycznego mamy również (przy założeniu, że $a > 0$)

$$\sqrt{a^4} = a^2, \quad \text{gdyż} \quad (a^2)^2 = a^4$$
$$\sqrt[3]{a^{12}} = a^4, \quad ,, \quad (a^4)^3 = a^{12}$$
$$\sqrt[5]{a^{10}} = a^2, \quad ,, \quad (a^2)^5 = a^{10}$$
$$\sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4, \quad ,, \quad (2^2)^3 = 2^6$$
$$\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2, \quad ,, \quad (a^2)^n = a^{2n}$$

A. Pierwiastek z iloczynu

Obliczmy pierwiastek z iloczynu, np. $\sqrt{144 \cdot 576}$. Zastanawiając się nad sposobem przeprowadzenia rachunku, dochodzimy do przekonania, że dotychczasowe nasze wiadomości pozwalają wybrać tylko jedną drogę; wykonać mnożenie $144 \cdot 576$ i następnie z otrzymanego iloczynu obliczyć pierwiastek kwadratowy.

Poznamy obecnie sposób prostszy. Wyprowadzimy wzór, za pomocą którego w pewnych przypadkach będziemy obliczali pierwiastek z iloczynu. Wzór ten ma postać

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ gdzie $a > 0$ i $b > 0$

Dowód. Obliczmy n-tą potęgę lewej i prawej strony:

$L^n = (\sqrt[n]{ab})^n = ab$ na podstawie wzoru (7)

$P^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$,, ,, ,, (4) i (7)

Otrzymaliśmy więc: $L = P$

Ponieważ $L > 0$ i $P > 0$, to na podstawie prawa (6) mamy

$$L = P \qquad \text{c. n. d.*)}$$

Wzór ten wypowiadamy słownie: **Aby obliczyć pierwiastek arytmetyczny z iloczynu liczb dodatnich, obliczamy pierwiastki arytmetyczne o danym wykładniku z poszczególnych czynników i otrzymane wyniki mnożymy.**

*) Skrót „c. n. d." oznacza „czego należało dowieść".

Powróćmy do naszego przykładu. Stosując poznany wzór, otrzymamy:

$$\sqrt{144 \cdot 576} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{576} = 12 \cdot 24 = 288$$

Podamy inne przykłady zastosowania wzoru (1).

Przykład 1.

a) $\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 8} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{8} = 5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$

b) $\sqrt{121a^4b^6} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{b^6} = 11a^2b^3$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$

c) $\sqrt[3]{64a^6b^9c^{15}} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{b^9} \cdot \sqrt[3]{c^{15}} = 4a^2b^3c^5$, gdzie $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$

d) $\sqrt[4]{a^8(a+b)^4} = \sqrt[4]{a^8} \cdot \sqrt[4]{(a+b)^4} = a^2(a+b)$, gdzie $a > 0$ i $a+b > 0$

Pierwiastek z ilorazu

Pierwiastek arytmetyczny z ilorazu obliczamy według wzoru.:

II $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \qquad \text{gdzie } a > 0 \text{ i } b > 0$$

Dowód: Obliczmy n-tą potęgę lewej i prawej strony:

$$L^n = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b} \qquad \text{na podstawie wzoru (7)}$$

$$P^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b} \qquad \text{,, ,, ,, (5) i (7)}$$

Otrzymaliśmy więc: $L^n = P^n$

Ponieważ $L > 0$ i $P > 0$, to na podstawie prawa (6) mamy

$$L = P \qquad \text{c. n. d.}$$

Wzór ten wypowiadamy słownie: **Aby obliczyć pierwiastek arytmetyczny z ilorazu liczb dodatnich, obliczamy pierwiastki arytmetyczne o danym wykładniku z dzielnej i dzielnika i pierwiastek z dzielnej dzielimy przez pierwiastek z dzielnika.**

Przykład 2.

a) $\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}$

b) $\sqrt[3]{\frac{216}{343}} = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{6}{7}$

c) $\sqrt{\frac{16a^4}{25b^6}} = \frac{\sqrt{16a^4}}{\sqrt{25b^6}} = \frac{4a^2}{5b^3}$, $a > 0$ i $b > 0$ (wzór I i II)

d) $\sqrt[3]{\frac{8a^6b^9}{27x^3y^{15}}} = \frac{\sqrt[3]{8a^6b^9}}{\sqrt[3]{27x^3y^{15}}} = \frac{2a^2b^3}{3xy^5}$, $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$ i $y > 0$

e) $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

B. Iloczyn pierwiastków arytmetycznych

Jeżeli wzór I odczytamy w przeciwnym kierunku, to otrzymamy

I'. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$

Wzór tak napisany nabiera innego znaczenia i daje nam regułę mnożenia pierwiastków arytmetycznych o jednakowych wykładnikach. Regułę tę sformułujemy w następujący sposób:

Aby pomnożyć pierwiastki arytmetyczne o jednakowych wykładnikach z liczb dodatnich, mnożymy liczby podpierwiastkowe i z otrzymanego iloczynu obliczamy pierwiastek o danym wykładniku.

Wzór (I') zastosujemy w poniższych przykładach:

Przykład 3.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$

c) $\sqrt{a} : \sqrt{a^3} = \sqrt{a \cdot a^3} = \sqrt{a^4} = a^2$ $(a > 0)$

d) $3\sqrt[3]{2ab} \cdot 5\sqrt[3]{4a^5b^2} = 15\sqrt[3]{2ab \cdot 4a^5b^2} = 15\sqrt[3]{8a^6b^3} = 15 \cdot 2a^2b$
$= 30a^2b$ $(a > 0$ i $b > 0)$

Iloraz pierwiastków arytmetycznych

Wzór (II) odczytany w przeciwnym kierunku przybiera postać:

II'. $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \qquad \text{gdzie} \quad a > 0 \quad \text{i} \quad b > 0$$

Wzór (II') daje nam regułę dzielenia pierwiastków arytmetycznych tego samego stopnia. Regułę tę wypowiemy słownie:

Aby podzielić pierwiastki arytmetyczne o jednakowych wykładnikach z liczb dodatnich, dzielimy liczby podpierwiastkowe i z otrzymanego ilorazu obliczamy pierwiastek o danym wykładniku.

Przykład 4.

a) $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{8:2} = \sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt[4]{a^7} : \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4]{a^7 : a^3} = \sqrt[4]{a^4} = a$

c) $$\sqrt[3]{\frac{16}{81}} : \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{16}{81} : \frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

d) $$\sqrt[5]{\frac{3a^6b^7}{64c^9}} : \sqrt[5]{\frac{3ac^6}{2b^3}} = \sqrt[5]{\frac{3a^6b^7}{64c^9} : \frac{3ac^6}{2b^3}} = \sqrt[5]{\frac{a^5b^{10}}{32c^{15}}} = \frac{ab^2}{2c^3}$$

$(a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0)$.

Pytania

1. Napiszcie wzór, według którego obliczacie pierwiastek arytmetyczny z iloczynu liczb dodatnich.
   Wzór ten wypowiedzcie słowami i uzasadnijcie.
2. Napiszcie wzór, według którego wykonujecie mnożenie pierwiastków arytmetycznych o jednakowych wykładnikach. Wzór ten wypowiedzcie słowami i uzasadnijcie.
3. Napiszcie wzór, według którego obliczacie pierwiastek arytmetyczny z ilorazu liczb dodatnich. Wzór ten wypowiedzcie słowami i uzasadnijcie.
4. Na jakie prawa powoływaliście się zarówno przy dowodzie wzoru na pierwiastek arytmetyczny z iloczynu, jak i wzoru na pierwiastek arytmetyczny z ilorazu?

5. Napiszcie wzór, według którego wykonujecie dzielenie pierwiastków arytmetycznych o jednakowych wykładnikach.

Wzór ten wypowiedzcie słowami.

Zadania

1. Obliczcie pamięciowo:

a) $\sqrt{2^4}$ *e) $\sqrt{(0{,}01)^2}$

b) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^6}$ *f) $\sqrt[3]{(0{,}4)^6}$

c) $\sqrt[3]{5^6}$ *g) $\sqrt[5]{3^{15}}$

d) $\sqrt[4]{(0{,}2)^8}$ *h) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$

2. Przyjmując, iż $a > 0$, wykonajcie pamięciowo:

a) $\sqrt[3]{a^3}$ d) $\sqrt[3]{a^9}$ *g) $\sqrt[5]{a^{20}}$

b) $\sqrt{a^6}$ e) $\sqrt[4]{a^8}$ *h) $\sqrt{a^{16}}$

c) $\sqrt{a^{10}}$ *f) $\sqrt[4]{a^{12}}$ *i) $\sqrt[6]{a^{18}}$

3. Obliczcie:

a) $\sqrt{36 \cdot 16}$ d) $\sqrt{64 \cdot 81 \cdot 225}$ g) $\sqrt[4]{16 \cdot 81 \cdot 625}$

b) $\sqrt{4 \cdot 25 \cdot 121}$ e) $\sqrt[3]{8 \cdot 64}$ h) $\sqrt{0{,}04 \cdot 0{,}36}$

*c) $\sqrt{49 \cdot 1{,}96}$ *f) $\sqrt[3]{27 \cdot 8 \cdot 0{,}125}$ *i) $\sqrt[3]{0{,}008 \cdot 0{,}001 \cdot 64}$

4. Wykonajcie pierwiastkowanie, przyjmując, że $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$;

a) $\sqrt{36a^4}$ *f) $\sqrt[3]{8a^3b^{15}c^{18}}$

b) $\sqrt{49a^2b^6}$ *g) $\sqrt[4]{16a^4b^8}$

c) $\sqrt{225a^6b^8c^{12}}$ *h) $\sqrt[4]{81a^{12}b^{16}}$

*d) $\sqrt[3]{27a^9}$ i) $\sqrt{(a+b)^4\,(a-b)^2}$, gdzie $a > b$

e) $\sqrt[3]{64a^6y^{12}}$ *j) $\sqrt[3]{(a+b)^6}$

5. Obliczcie:

a) $\sqrt{\frac{49}{64}}$

b) $\sqrt{\frac{121}{225}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$

*e) $\sqrt{\frac{1}{324}}$

*f) $\sqrt[4]{\frac{81}{10000}}$

*g) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

*h) $\sqrt[3]{\frac{1000}{729}}$

*i) $\sqrt{\frac{529}{576}}$

6. Obliczcie:

a) $\sqrt{20\frac{1}{4}}$

b) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

*c) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$

d) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$

*e) $\sqrt{2\frac{46}{49}}$

f) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

*g) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

h) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$

*i) $\sqrt[3]{4\frac{17}{27}}$

7. Wykonajcie pierwiastkowanie ($a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$):

a) $\sqrt{\frac{a^2}{b^4}}$

*b) $\sqrt{\frac{a^4b^6}{c^2}}$

c) $\sqrt{\frac{25a^6}{49b^{10}}}$

*d) $\sqrt{\frac{1}{100a^2b^8}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^9}}$

f) $\sqrt[4]{\frac{a^4}{b^{12}}}$

g) $\sqrt[3]{\frac{125a^3b^{12}}{216c^9}}$

*h) $\sqrt[4]{\frac{a^{16}b^8}{625c^4}}$

*j) $\sqrt[5]{\frac{1}{32a^{10}b^{15}}}$

8. Wykonajcie mnożenie pierwiastków i obliczcie:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$

*b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$

*c) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{54}$

d) $\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}$

e) $\sqrt{0{,}06}\cdot\sqrt{96}$

f) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{16{,}9}$

g) $\sqrt[3]{0{,}1}\cdot\sqrt[3]{0{,}2}\cdot\sqrt[3]{0{,}4}$

*h) $\sqrt{24}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$

i) $\sqrt[3]{108}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

*j) $\sqrt{0{,}2}\cdot\sqrt{0{,}1}\cdot\sqrt{0{,}08}$

9. Wykonajcie dzielenie pierwiastków i obliczcie:

a) $\sqrt{12}:\sqrt{3}$

*b) $\sqrt{125}:\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{32}:\sqrt[3]{4}$

*d) $\sqrt[3]{189}:\sqrt[3]{7}$

e) $\sqrt[4]{64}:\sqrt[4]{4}$

*f) $\sqrt{1000}:\sqrt{10}$

g) $\sqrt{4\frac{1}{6}}:\sqrt{\frac{1}{6}}$

*h) $\sqrt{7\frac{1}{7}}:\sqrt{3\frac{1}{2}}$

i) $\sqrt[3]{1\frac{1}{3}}:\sqrt[3]{4\frac{1}{2}}$

10. Wykonajcie mnożenie pierwiastków i wynik napiszcie w najprostszej postaci.

Uwaga. W przykładach 10 i 11 zakładamy, iż a, b, c, x, y, z są dodatnie.

a) $\sqrt{2x}\cdot\sqrt{18x}$

b) $\sqrt{3a}\cdot\sqrt{12a^3}$

*c) $\sqrt{2a^3}\cdot\sqrt{50a^5}$

d) $4\sqrt{3ab^3}\cdot 5\sqrt{3a^3b}$

e) $a\sqrt{\frac{1}{5}ab^2c^3}\cdot a^2\sqrt{125a^5b^4c}$

*f) $\frac{1}{2}x\sqrt{2xy^6z^5}\cdot 10\sqrt{2x^5z^3}$

g) $\sqrt[3]{4x^2y^4}\cdot\sqrt[3]{16xy^5}$

h) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}a^5b^8c^2}\cdot\sqrt[4]{32a^3c^2}$

*i) $\sqrt{01{,}ab^3c}\cdot\sqrt{0{,}1a^3b^5c^9}\cdot\sqrt{0{,}04b^8c^2}$

j) $\sqrt{\frac{2xy^3}{75}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3x^3y}}$

k) $\sqrt[3]{\frac{5x^4z^2}{4y^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{25x^2y^5}{2z^{11}}}$

*l) $\sqrt[4]{\frac{27a}{b^3c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{3a^3b^7}{c^7}}$

11. Wykonajcie dzielenie pierwiastków i wyniki napiszcie w najprostszej postaci:

a) $\sqrt{a^3}:\sqrt{a}$

b) $\sqrt{18a^7}:\sqrt{2a^3}$

c) $\sqrt[3]{16a^5b^7}:\sqrt[3]{2a^2b}$

d) $\sqrt[4]{48x^4y^7z^5}:\sqrt[4]{3y^3z}$

e) $\sqrt{\frac{1}{2}a^3b}:\sqrt{\frac{1}{8}ab}$

f) $\sqrt{\frac{3xy^5}{5z^3}}:\sqrt{\frac{5z}{12x^3y}}$

*g) $\sqrt{\frac{18a^3b^7}{125c^5}} : \sqrt{\frac{2ab^3}{5c}}$

*h) $\sqrt[3]{4a^2b} : \sqrt[3]{\frac{b}{2a}}$

*i) $\sqrt[3]{\frac{25a^5b^4}{3c^2}} : \sqrt[3]{\frac{a^2b}{15c^5}}$

j) $\sqrt{\frac{1}{18ab^3}} : \sqrt{8ab}$

*k) $\sqrt{\frac{3c^3}{ab}} : \sqrt{12a^3bc}$

l) $\sqrt[4]{5xy} : \sqrt[4]{\frac{80x^5}{y^7}}$

Odpowiedzi

3. a) 24, b) 110, c) 9,8, d) 1080, e) 8, f) 3, g) 30, h) 0,12 i) 0,08. **6.** a) $4\frac{1}{2}$, b) $1\frac{1}{4}$, c) $1\frac{1}{5}$, d) $3\frac{1}{3}$, e) $1\frac{5}{7}$, f) $1\frac{1}{2}$, g) $1\frac{1}{3}$, h) $1\frac{1}{2}$, i) $1\frac{2}{3}$. **8.** a) 4, b) 9, c) 18, d) 12, e) 2,4, f) 13, g) 0,2, h) 2, i) 3, j) 0,04. **9.** a) 2, b) 5, c) 2, d) 3, e) 2, f) 10, g) 5, h) $1\frac{3}{7}$, i) $\frac{2}{3}$.

10. d) $60a^2b^2$, e) $5a^6b^3c^2$, f) $10x^4y^3z^4$, i) $0{,}02a^2b^8c^6$, j) $\frac{2y}{15x}$, k) $\frac{5x^2y}{2z^3}$, l) $\frac{3ab}{c^2}$. **11.** d) $2xyz$, e) $2a$, f) $\frac{6x^2y^3}{5z^2}$, g) $\frac{3ab^2}{5c^2}$, h) $2a$, i) $5abc$, j) $\frac{1}{12ab^2}$, k) $\frac{c}{2a^2b}$, l) $\frac{y^2}{2x}$.

LEKCJA 9

Pierwiastek z potęgi. Potęga pierwiastka. Pierwiastek z pierwiastka

A. Pierwiastek z potęgi

Obliczmy pierwiastek z potęgi np. $\sqrt{49^3}$. Dla wykonania rachunku nie będziemy liczby 49 podnosili do potęgi trzeciej i z otrzymanego iloczynu obliczali pierwiastka kwadratowego, lecz znajdziemy sposób prostszy, wykorzystując wiadomości nabyte na lekcji poprzedniej. Zauważmy, że

$$\sqrt{49^3} = \sqrt{49 \cdot 49 \cdot 49} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{49} = (\sqrt{49})^3 = 7^3 = 343$$

Uzasadnimy obecnie wzór ogólny, którym posługiwać się będziemy w pewnych przypadkach przy obliczaniu pierwiastka arytmetycznego z potęgi. Wzór ten ma postać:

III. $$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \qquad \text{gdzie } a > 0$$

Słuszność tego wzoru wynika bezpośrednio z udowodnionej na poprzedniej lekcji reguły obliczania pierwiastka arytmetycznego z iloczynu liczb dodatnich. Istotnie:

$$\sqrt[n]{a^m} = \underbrace{\sqrt[n]{a \cdot a \cdot a \ldots a}}_{m \text{ razy}} = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \ldots \sqrt[n]{a}}_{m \text{ razy}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Wzór ten sformułujemy słownie w następujący sposób: **Aby obliczyć pierwiastek arytmetyczny z m-tej potęgi liczby dodatniej, obliczamy pierwiastek o danym wykładniku z podstawy potęgi i otrzymany pierwiastek podnosimy do potęgi m-tej.**

Przykład 1.

a) $\sqrt{4^3} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$

b) $\sqrt{36^3} = (\sqrt{36})^3 = 6^3 = 216$

c) $\sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^3} = \left(\sqrt{\frac{16}{25}}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$

d) $\sqrt[3]{\left(\frac{8}{125}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{8}{125}}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

B. Potęga pierwiastka

Jeżeli wzór III odczytamy w przeciwnym kierunku, to otrzymamy.

III′. $$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{gdzie } a > 0$$

Tak napisany wzór daje nam regułę potęgowania pierwiastka arytmetycznego, którą sformułujemy w następujący sposób:

Aby podnieść do potęgi pierwiastek arytmetyczny z liczby dodatniej, podnosimy do tej potęgi liczbę podpierwiastkową i z otrzymanej potęgi obliczamy pierwiastek o danym wykładniku.

Podamy przykłady zastosowania tego wzoru:

Przykład 2.

a) $(\sqrt{2})^6 = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$

b) $(\sqrt[3]{4})^9 = \sqrt[3]{4^9} = 4^3 = 64$

c) $(\sqrt{x^3y^2z})^4 = \sqrt{(x^3y^2z)^4} = (x^3y^2z)^2 = x^6y^4z^2, \quad x>0, \quad y>0, \quad z>0$

d) $\left(\sqrt[3]{\frac{5x^5y^3}{6z}}\right)^6 = \sqrt[3]{\left(\frac{5x^5y^3}{6z}\right)^6} = \left(\frac{5x^5y^3}{6z}\right)^2 = \frac{25x^{10}y^6}{36z^2}$

$x > 0, \; y > 0, \; z > 0$

C. Pierwiastek z pierwiastka

Udowodnimy wzór, który pozwoli nam przekształcić pierwiastek z pierwiastka i napisać takie wyrażenie pod postacią jednego pierwiastka. Jest to wzór

IV. $$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \qquad \text{gdzie } a > 0.$$

Dowód: Obliczamy nm-tą potęgę lewej i prawej strony:

$L^{nm} = \left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{nm} =$ Powołujemy się na regułę potęgowania potęgi (wzór 3). Jeżeli $(a^n)^m = a^{nm}$, to i odwrotnie $a^{nm} = (a^n)^m$

$= \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right]^m =$

$= (\sqrt[m]{a})^m = a$ na podstawie wzoru (7)

$P^{nm} = (\sqrt[nm]{a})^{nm} = a$ na podstawie wzoru (7).

Otrzymaliśmy więc: $L^{nm} = P^{nm}$

Ponieważ $L > 0$ i $P > 0$, to na podstawie prawa (6) mamy

$$L = P$$ c. n. d.

Przykład 3.

a) $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$, gdzie $a > 0$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^7}} = \sqrt[12]{a^7}$ „

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^3}}} = \sqrt[8]{a^3}$ „

d) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{a^{11}}}} = \sqrt[30]{a^{11}}$ „

Kolejność pierwiastkowania

Ze wzorów:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \qquad \text{gdzie } a > 0$$

$$\text{i } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad \text{„ „}$$

wynika, że

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}, \qquad \text{gdzie } a > 0$$

Wzór ten oznacza, że **przy obliczaniu pierwiastka z pierwiastka kolejność pierwiastkowania może być dowolna.**

Reguła ta pozwoli nam w pewnych wypadkach doprowadzić wyrażenia pierwiastkowe do prostszej postaci. Pokazują to poniższe przykłady.

Przykłady

a) $\sqrt{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[5]{\sqrt{a^6}} = \sqrt[5]{a^3}.$ gdzie $a > 0$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^{15}}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{a^{15}}} = \sqrt[4]{a^3}$ „ „

c) $\sqrt{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{\sqrt{16}} = \sqrt[3]{4}$ „ „

Obliczanie pierwiastków o wyższych wykładnikach

Wzór IV odczytać możemy w przeciwnym kierunku i wtedy otrzymamy:

IV′ $$\sqrt[nm]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}, \qquad \text{gdzie } a > 0$$

Wzór ten oznacza, że **arytmetyczny pierwiastek, którego wykładnik jest iloczynem liczb naturalnych, obliczamy przez kolejne pierwiastkowanie.**

Zastosowanie tego wzoru pokażemy na przykładach.

Przykłady

a) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[2\cdot 3]{8} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$

b) $\sqrt[4]{36} = \sqrt[2\cdot 2]{36} = \sqrt{\sqrt{36}} = \sqrt{6}$

c) $\sqrt[4]{2} = \sqrt[2\cdot 2]{2} = \sqrt{\sqrt{2}} \approx \sqrt{1{,}4142} \approx 1{,}18$

d) $\sqrt[8]{15} = \sqrt[2\cdot 2\cdot 2]{15} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{15}}} \approx \sqrt{\sqrt{3{,}8729}} \approx \sqrt{1{,}96} \approx 1{,}4$

Pytania

1. Wzór $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$, gdzie $a > 0$, wypowiedzcie słowami i uzasadnijcie, a następnie wykażcie na przykładzie, w jakim wypadku jest celowe wykorzystanie tego wzoru.
2. Napiszcie wzór, za pomocą którego wykonujecie potęgowanie arytmetycznego pierwiastka. Wzór ten wypowiedzcie słowami i podajcie przykład zastosowania tego wzoru.
3. Napiszcie wzór, za pomocą którego pierwiastkujecie pierwiastek. Wypowiedzcie go słowami i podajcie przykład zastosowania tego wzoru.
4. Napiszcie prościej $\sqrt{\sqrt[3]{25}}$ i powiedzcie, na jakich wzorach oparliście przekształcenia.
5. Opiszcie sposób postępowania przy obliczaniu $\sqrt[6]{27}$.

Zadania

1. Obliczcie:

a) $\sqrt{4^3}$

b) $\sqrt{25^4}$

c) $\sqrt[3]{8^5}$

d) $\sqrt[4]{81^5}$

e) $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^5}$

f) $\sqrt[3]{(0{,}001)^2}$

2. Obliczcie:

a) $(\sqrt{5})^4$

b) $(\sqrt{17})^4$

c) $(\sqrt[3]{4})^6$

d) $(\sqrt{2})^8$

*e) $(\sqrt[3]{2})^{12}$

*f) $(\sqrt[4]{6})^8$

*g) $(\sqrt{a^7})^4$

*h) $(\sqrt[5]{2a^3b})^{10}$

3. Przedstawcie w postaci jednego pierwiastka:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{a^4}}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}$

*d) $\sqrt{\sqrt[5]{a^{11}}}$

*e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^5}}$

f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$

4. Zmieńcie kolejność pierwiastkowania i przedstawcie w sposób najprostszy w postaci jednego pierwiastka: $(a > 0,\ b > 0)$

a) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$ *g) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}}$

b) $\sqrt{\sqrt[5]{a^4}}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ *h) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^8 b^{12}}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^{10}}}$ f) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}}$ *i) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{18}}}}$

5. Przedstawcie prościej:

a) $\sqrt[4]{36}$ *d) $\sqrt[4]{100}$ g) $\sqrt[6]{125}$

b) $\sqrt[8]{81}$ e) $\sqrt[6]{27}$ *h) $\sqrt[10]{32}$

*c) $\sqrt[8]{16}$ *f) $\sqrt[6]{8}$ i) $\sqrt[4]{0{,}09}$

6. Obliczcie z dokładnością do 0,01.

a) $\sqrt[4]{3}$ *d) $\sqrt[8]{36}$

*b) $\sqrt[4]{5}$ *e) $\sqrt[8]{121}$

*c) $\sqrt[4]{10}$ *f) $\sqrt[8]{5}$

Odpowiedzi

4. a) $\sqrt[3]{a}$, b) $\sqrt[5]{a^2}$, c) $\sqrt[3]{a^2}$, d) $\sqrt[3]{2}$, e) $\sqrt{3}$, f) $\sqrt[3]{2}$, g) $\sqrt[3]{2}$. h) $\sqrt[5]{a^2b^3}$, i) $\sqrt[5]{a^3}$. **5.** a) $\sqrt{6}$, b) $\sqrt{3}$, c) $\sqrt{2}$, d) $\sqrt{10}$, e) $\sqrt{3}$, f) $\sqrt{2}$, g) $\sqrt{5}$, h) $\sqrt{2}$, i) $\sqrt{0{,}3}$, **6.** a) 1,32, b) 1,50, c) 1,78, d) 1,56, e) 1,82, f) 1,22.

LEKCJA 10

A. Zmiana wykładnika pierwiastka
B. Sprowadzanie pierwiastków do wspólnego wykładnika
C. Mnożenie i dzielenie pierwiastków o różnych wykładnikach

Na lekcjach 7 i 8 mówiliśmy o mnożeniu i dzieleniu pierwiastków arytmetycznych. Wyprowadziliśmy wzory:

I′ $$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

II' $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$ gdzie $a > 0$ i $b > 0$

Wzory te dotyczą tylko pierwiastków o jednakowych wykładnikach. Zachodzi pytanie, czy istnieje możliwość pomnożenia lub podzielenia pierwiastków arytmetycznych o różnych wykładnikach. Do tej pory nie poznaliśmy reguł, które pozwoliłyby takie działanie wykonać.

A. Rozszerzymy nasze wiadomości, dowodząc wzoru:

V $$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

gdzie $a > 0$ oraz m, n i p są liczbami naturalnymi większymi od 1.

Dowód: Obliczmy n-tą potęgę prawej i lewej strony

$L^n = (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$ na podstawie wzoru (7)

$P^n = (\sqrt[np]{a^{mp}})^n = \sqrt[np]{a^{mpn}} =$ na podstawie wzoru III'

$= (\sqrt[np]{a^m})^{np} =$ „ „ „ III

$= a^m$ „ „ „ (7)

Otrzymaliśmy więc: $L^n = P^n$

Ponieważ $L > 0$ i $P > 0$, więc na mocy (6) wnioskujemy, że

$$L = P$$ c. n. d.

Wzór V napisany w przeciwnym kierunku ma postać:

V' $$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

gdzie $a > 0$ oraz m, n i p są liczbami naturalnymi większymi od 1.

Wzory V i V' wypowiemy w następujący sposób:

Wartość pierwiastka arytmetycznego z potęgi nie zmieni się, jeżeli wykładnik pierwiastkowy i wykładnik potęgowy liczby podpierwiastkowej pomnożymy przez tę samą liczbę naturalną lub podzielimy przez wspólny podzielnik wykładników.

Zastosowanie wyprowadzonych wzorów pokażemy na przykładach.

Przykład 1.

a) $\sqrt{a^2} = \sqrt[2\cdot 2]{a^{2\cdot 2}} = \sqrt[4]{a^4}$

b) $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[2\cdot 5]{a^{2\cdot 5}} = \sqrt[15]{a^{10}}$

c) $\sqrt[8]{a^{12}} = \sqrt[8:4]{a^{12:4}} = \sqrt{a^3}$

d) $\sqrt[3]{2ab^2c} = \sqrt[3\cdot 2]{(2ab^2c)^2} = \sqrt[6]{4a^2b^4c^2}$

e) $\sqrt[12]{a^8b^{12}c^{20}} = \sqrt[12:4]{a^{8:4}b^{12:4}c^{20:4}} = \sqrt[3]{a^2b^3c^5}$

f) $\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4\cdot 2]{5^{2:2}} = \sqrt{5}$

g) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6:3]{2^{3:3}} = \sqrt{2}$

B. Sprowadzanie pierwiastków do wspólnego wykładnika

Weźmy pierwiastki: $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a^3}$ i $\sqrt[6]{a^5}$. Wykładniki tych pierwiastków są różne: 3, 2, 4 i 6. Chcąc pierwiastki te sprowadzić do wspólnego wykładnika, znajdujemy dla danych wykładników najmniejszą wspólną wielokrotność. Będzie to liczba 12. Stosując wzór V, otrzymamy

$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3\cdot 4]{a^{2\cdot 4}} = \sqrt[12]{a^8}$, gdzie $a > 0$

$\sqrt{a} = \sqrt[2\cdot 6]{a^{1\cdot 6}} = \sqrt[12]{a^6}$ „

$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4\cdot 3]{a^{3\cdot 3}} = \sqrt[12]{a^9}$ „

$\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6\cdot 2]{a^{5\cdot 2}} = \sqrt[12]{a^{10}}$ „

Podamy jeszcze inne przykłady sprowadzania pierwiastków do wspólnego wykładnika.

Przykład 2.

$\sqrt[3]{2a^2} = \sqrt[3\cdot 6]{(2a^2)^6} = \sqrt[12]{64a^{12}}$

$\sqrt[6]{3a} = \sqrt[6\cdot 3]{(3a)^3} = \sqrt[18]{27a^3}$

$\sqrt[9]{5a^7} = \sqrt[9\cdot 2]{(5a^7)^2} = \sqrt[18]{25a^{14}}$

$\sqrt{a} = \sqrt[2\cdot 9]{a^{1\cdot 9}} = \sqrt[18]{a^9}$

C. Mnożenie i dzielenie pierwiastków o różnych wykładnikach

Obecnie możemy odpowiedzieć na pytanie postawione na początku lekcji.

Arytmetyczne pierwiastki o różnych wykładnikach możemy mnożyć i dzielić według wzorów I′ i II′ po uprzednim sprowadzeniu tych pierwiastków do wspólnego wykładnika.

Sposób postępowania pokażemy na przykładach:

Przykład 3.

a) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4} = \sqrt[5\cdot 3]{a^{2\cdot 5}} \cdot \sqrt[5\cdot 3]{a^{4\cdot 3}} = \sqrt[15]{a^{10}} \cdot \sqrt[15]{a^{12}} = \sqrt[15]{a^{10} \cdot a^{12}} = \sqrt[15]{a^{22}}$

b) $\sqrt[4]{a^2b} \cdot \sqrt[6]{a^5b^4} = \sqrt[4\cdot 3]{(a^2b)^3} \cdot \sqrt[6\cdot 2]{(a^5b^4)^2} = \sqrt[12]{a^6b^3} \cdot \sqrt[12]{a^{10}b^8} =$
$= \sqrt[12]{a^6b^3 \cdot a^{10}b^8} = \sqrt[12]{a^{16}b^{11}}$

c) $\sqrt{3a} \cdot \sqrt[3]{2a^2} = \sqrt[2\cdot 3]{(3a)^3} \cdot \sqrt[3\cdot 2]{(2a^2)^2} = \sqrt[6]{27a^3} \cdot \sqrt[6]{4a^4} =$
$= \sqrt[6]{27a^3 \cdot 4a^4} = \sqrt[6]{108a^7}$

d) $\sqrt[5]{8a^7b^3} : \sqrt{2ab} = \sqrt[5\cdot 2]{(8a^7b^3)^2} : \sqrt[2\cdot 5]{(2ab)^5} = \sqrt[10]{64a^{14}b^6} : \sqrt[10]{32a^5b^5} =$
$= \sqrt[10]{64a^{14}b^6 : 32a^5b^5} = \sqrt[10]{2a^9b}$

Porównywanie pierwiastków o różnych wykładnikach

Wiemy, że z dwu pierwiastków o jednakowych wykładnikach ten jest większy, którego liczba podpierwiastkowa jest większa. Np.

$$\sqrt{10} > \sqrt{8}, \quad \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{7}$$

Dla porównania dwu pierwiastków o różnych wykładnikach należy pierwiastki te sprowadzić do wspólnego wykładnika.

Przykład 4. Porównać pierwiastki: $\sqrt[3]{9}$ i $\sqrt[4]{18}$.

Sprowadzamy pierwiastki do wspólnego wykładnika:

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3\cdot 4]{9^{1\cdot 4}} = \sqrt[12]{6561}$$

$$\sqrt[4]{18} = \sqrt[4\cdot 3]{18^3} = \sqrt[12]{5832}$$

Z otrzymanych wyników wnioskujemy, że $\sqrt[3]{9} > \sqrt[4]{18}$.

Pytania

1. Jakie działania możecie wykonać na wykładniku pierwiastkowym i na wykładniku potęgowym liczby podpierwiastkowej, aby wartość pierwiastka nie uległa zmianie?

2. Napiszcie wzór, na podstawie którego możecie przekształcić pierwiastek tak, by uległy zmianie jego wykładniki pierwiastkowy i potęgowy. Wzór ten uzasadnijcie.

3. Wyjaśnijcie sposób postępowania przy mnożeniu i dzieleniu pierwiastków arytmetycznych o różnych wykładnikach pierwiastkowych.

4. Omówcie, jak postępujecie, gdy chcecie porównać pierwiastki o różnych wykładnikach pierwiastkowych.

Zadania

1. Przekształćcie pierwiastki tak, by ich wykładniki były możliwie najmniejsze ($a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$):

a) $\sqrt[4]{100}$
*b) $\sqrt[4]{49}$
c) $\sqrt[6]{25}$
*d) $\sqrt[6]{121}$
e) $\sqrt[6]{27}$
f) $\sqrt[8]{81}$
*g) $\sqrt[12]{16}$
*h) $\sqrt[10]{32}$
*i) $\sqrt[8]{144}$
k) $\sqrt[4]{a^6}$
l) $\sqrt[6]{a^3}$
m) $\sqrt[8]{a^2b^4}$
*n) $\sqrt[4]{4a^2b^6}$
o) $\sqrt[10]{25a^8b^2}$
p) $\sqrt[6]{8a^3b^9}$
r) $\sqrt[4]{\frac{a^2}{b^6}}$
s) $\sqrt[6]{\frac{64a^3}{27b^{12}}}$
*t) $\sqrt[8]{\frac{16a^4}{b^8c^{12}}}$

2. Sprowadźcie pierwiastki do wspólnego wykładnika:

($a > 0$ i $b > 0$)

a) $\sqrt{a}$; $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[8]{a^5}$
b) $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[4]{a}$; $\sqrt{a}$; $\sqrt[6]{a}$
c) $\sqrt{2ab}$; $\sqrt[3]{3a^2b}$; $\sqrt[6]{5a^5b^4}$
*d) $\sqrt[4]{ab^2}$; $\sqrt{a^3b}$; $\sqrt[8]{a^5b^7}$

3. Uszeregujcie pierwiastki według wielkości:

a) $\sqrt[6]{26}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt{6}$; $\sqrt[4]{35}$; $\sqrt[8]{1235}$

*c) $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[6]{11}$; $\sqrt[12]{95}$

4. Wykonajcie działania:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[3]{5} : \sqrt[6]{10}$

*c) $\dfrac{\sqrt[4]{12}\cdot\sqrt[8]{27}}{\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{6}\cdot\sqrt[12]{16}}{\sqrt[3]{4}}$

5. Wykonajcie działania ($a > 0$ i $b > 0$):

a) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}$

b) $\sqrt{a} : \sqrt[4]{a}$

c) $(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^5}) : \sqrt{a}$

d) $\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt[5]{a^4b^3}$

*e) $\sqrt[4]{12a^3b^2} : \sqrt{2ab}$

*f) $\dfrac{1}{2}\sqrt[6]{a^5b}\cdot\dfrac{2}{3}\sqrt{2ab^2}\cdot 9\sqrt[3]{3a^2b}$

*g) $\dfrac{\sqrt{a^3b^5}\cdot\sqrt[4]{4a^2b^2}\cdot\sqrt[3]{2a^5}}{\sqrt[6]{a^7b^5}\cdot\sqrt[12]{128a^{11}b^{14}}}$

Odpowiedzi

1. a) $\sqrt{10}$, b) $\sqrt{7}$, c) $\sqrt[3]{5}$, d) $\sqrt[3]{11}$, e) $\sqrt{3}$, f) $\sqrt{3}$, g) $\sqrt[3]{2}$, h) $\sqrt{2}$, i) $\sqrt[4]{12}$, n) $\sqrt{2ab^3}$, o) $\sqrt[5]{5a^4b}$, p) $\sqrt{2ab^3}$, r) $\sqrt{\dfrac{a}{b^3}}$, s) $\sqrt{\dfrac{4a}{3b^4}}$, t) $\sqrt{\dfrac{2a}{b^2c^3}}$.

2. c) $\sqrt[6]{8a^3b^3}$, $\sqrt[6]{9a^4b^2}$, $\sqrt[6]{5a^5b^4}$, d) $\sqrt[8]{a^2b^4}$, $\sqrt[8]{a^{12}b^4}$, $\sqrt[8]{a^5b^7}$. **3.** c) $\sqrt{2} = \sqrt[12]{64}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{81}$, $\sqrt[12]{95}$, $\sqrt[6]{11} = \sqrt[12]{121}$, $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}$. **4.** a) $\sqrt[6]{108}$, b) $\sqrt[6]{2{,}5}$, c) $\sqrt[8]{48}$, d) $\sqrt[12]{18}$. **5.** c) a, d) $\sqrt[15]{a^{22}b^{14}}$, e) $\sqrt[4]{3a}$, f) $3\sqrt[6]{72a^{12}b^9}$, g) $\sqrt[12]{8a^{19}b^{12}}$.

LEKCJE 11 i 12

A. Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka
B. Włączanie czynnika pod znak pierwiastka
C. Przekształcanie sum zawierających pierwiastki

A. W lekcji 7 poznaliśmy wzór 1, który pozwala przekształcać pierwiastek arytmetyczny z iloczynu liczb dodatnich.

Stosując ten wzór, możemy napisać:

VI. $\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$

Przekształcenie takie nazywać będziemy wyłączaniem czynnika przed znak pierwiastka. Jednocześnie mówimy, że postać $\sqrt[n]{a^n b}$ sprowadziliśmy do postaci prostszej $a\sqrt[n]{b}$.

W dalszym ciągu pod najprostszą postacią pierwiastka rozumieć będziemy taką postać, w której wykładnik pierwiastkowy jest możliwie najniższy, a liczba podpierwiastkowa jest taka, że żaden czynnik nie da się już wyłączyć przed znak pierwiastka.

W niżej podanych przykładach pierwiastki sprowadzimy do prostszej postaci, wyłączając czynnik przed znak pierwiastka.

Przykład 1.

a) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{1008} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2} \cdot \sqrt{7} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} = 12\sqrt{7}$

e) $\sqrt[3]{1344} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 7} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{21} = 4\sqrt[3]{21}$

Uwaga. W przykładach a), b) i c) dokonaliśmy pamięciowego rozkładu liczby podpierwiastkowej na iloczyn dwu czynników, z których jeden jest kwadratem innej liczby możliwie największej. W przykładach d) i e) rozłożyliśmy liczby podpierwiastkowe na czynniki pierwsze znanym sposobem.

1344	2
672	2
336	2
168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

$1344 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7$

f) $\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a\sqrt{a}$

g) $\sqrt{a^9} = \sqrt{a^8 \cdot a} = \sqrt{a^8} \cdot \sqrt{a} = a^4\sqrt{a}$

h) $\sqrt[3]{a^{11}} = \sqrt[3]{a^9 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^9} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^3\sqrt[3]{a^2}$

i) $\sqrt[4]{a^{15}} = \sqrt[4]{a^{12} \cdot a^3} = \sqrt[4]{a^{12}} \cdot \sqrt[4]{a^3} = a^3\sqrt[4]{a^3}$

j) $\sqrt{a^5b^7} = \sqrt{a^4 \cdot a \cdot b^6 \cdot b} = \sqrt{a^4b^6} \cdot \sqrt{ab} = a^2b^3\sqrt{ab}$

k) $\sqrt[4]{48a^5b^{10}} = \sqrt[4]{16a^4b^8} \cdot \sqrt[4]{3ab^2} = 2ab^2\sqrt[4]{3ab^2}$

B. Włączanie czynnika pod znak pierwiastka

Jeżeli wzór VI odczytamy w przeciwnym kierunku, otrzymamy

VI′ $$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b},$$

gdzie $a > 0$ i $b > 0$.

Wzór VI′ mówi nam, że czynnik stojący przed pierwiastkiem można włączyć pod znak pierwiastka, podnosząc go do takiej potęgi, jaki jest wykładnik pierwiastka.

Przykład 2.

a) $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$

b) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$

c) $\frac{2}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{2}} = \sqrt{2}$

d) $a^2b\sqrt{ab} = \sqrt{(a^2b)^2 \cdot ab} = \sqrt{a^4b^2 \cdot ab} = \sqrt{a^5b^3}$ $(a > 0 \text{ i } b > 0)$

e) $\frac{4a^2}{5b}\sqrt[3]{\frac{75b^5}{128a^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4a^2}{5b}\right)^3 \cdot \frac{75b^5}{128a^2}} = \sqrt[3]{\frac{64a^6}{125b^3} \cdot \frac{75b^5}{128a^2}} = \sqrt[3]{\frac{3a^4b^2}{10}}$

f) $(a+b)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{(a+b)^2 \cdot \frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{(a+b)(a-b)} = \sqrt{a^2-b^2}$

gdzie $a+b > 0$ i $a-b > 0$

W lekcji 9 (str. 50) wyprowadziliśmy wzór

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

gdzie $a > 0$

Jeżeli pod pierwiastkiem występuje iloczyn liczby wymiernej przez pierwiastek, np.

$$\sqrt[3]{a\sqrt{b}}$$

to, aby takie wyrażenie napisać pod postacią jednego pierwiastka,

należy liczbę a włączyć pod znak pierwiastka kwadratowego. Otrzymamy więc

$$\sqrt[3]{a\sqrt{b}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2b}} = \sqrt[6]{a^2b}$$

Podamy kilka dalszych przykładów.

Przykład 3.

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 3}} = \sqrt[6]{12}$

b) $\sqrt{3\sqrt[3]{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^3\cdot 2}} = \sqrt[6]{54}$

c) $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt{\sqrt{3^2\cdot 2}}} = \sqrt{2\sqrt[4]{18}} = \sqrt{\sqrt[4]{2^4\cdot 18}} =$
$= \sqrt[8]{16\cdot 18} = \sqrt[8]{288}$

d) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}} = \sqrt{a\sqrt[3]{\sqrt{a^4\cdot a}}} = \sqrt{a\sqrt[6]{a^5}} = \sqrt{\sqrt[6]{a^6\cdot a^5}} = \sqrt[12]{a^{11}}$

e) $\sqrt[3]{2a\sqrt{3\sqrt{a}}} = \sqrt[3]{2a\sqrt{\sqrt{3^2\cdot a}}} = \sqrt[3]{2a\sqrt[4]{9a}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4a^4\cdot 9a}} = \sqrt[12]{144a^5}$

C. Przekształcanie sum zawierających pierwiastki

Weźmy sumę pierwiastków o różnych wykładnikach, np. w postaci:

$$\sqrt[4]{3} + \sqrt[5]{2}, \qquad \sqrt[3]{7} + \sqrt[5]{7}$$

Poszczególne pierwiastki występujące w tych sumach mają postać najprostszą. Sum takich nie można napisać w innej, jeszcze prostszej postaci.

Nie możemy również napisać w prostszej postaci sumy pierwiastków o jednakowych wykładnikach, np.

$$\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{5}$$

gdyż poszczególne pierwiastki mają już postać najprostszą.

Obecnie przerobimy kilka przykładów, w których — dokonując przekształceń pierwiastków — sprowadzimy, sumę do postaci prostszej.

Przykład 4.

$$\sqrt{2} + \sqrt{50} = \sqrt{2} + \sqrt{25\cdot 2} = \sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (1+5)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

W przykładzie tym sumę pierwiastków zastąpiliśmy jednym wyrażeniem pierwiastkowym. Dokonaliśmy więc czynności, którą nazywamy redukcją. Była ona możliwa, gdy po przekształceniu pierwiastków otrzymaliśmy dwa wyrażenia zawierające pierwiastek tego samego stopnia i z tej samej liczby podpierwiastkowej. Takie wyrażenia pierwiastkowe nazywać będziemy podobnymi.

Podamy przykłady redukcji wyrażeń pierwiastkowych podobnych.

Przykład 5.

a) $5\sqrt{a}-7\sqrt{a}+\sqrt{a}+11\sqrt{a}=(5-7+1+11)\sqrt{a}=10\sqrt{a}$

b) $11\sqrt{a}-3\sqrt{b}-2\sqrt{b}-7\sqrt{a}+12\sqrt{b}=(11-7)\sqrt{a}+(-3-2+12)\cdot\sqrt{b}=4\sqrt{a}+7\sqrt{b}$

c) $8\sqrt[3]{a}+14\sqrt{a}-2\sqrt[3]{a}-7\sqrt{a}-3\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}=(8-2+1)\sqrt[3]{a}+(14-7-3)\sqrt{a}=7\sqrt[3]{a}+4\sqrt{a}$

W dalszych przykładach przeprowadzimy redukcję wyrażeń pierwiastkowych podobnych po uprzednim przekształceniu pierwiastków.

Przykład 6.

a) $2\sqrt{12}-5\sqrt{48}+3\sqrt{75}-\sqrt{300}=2\sqrt{4\cdot3}-5\sqrt{16\cdot3}+3\sqrt{25\cdot3}-\sqrt{100\cdot3}=4\sqrt{3}-20\sqrt{3}+15\sqrt{3}-10\sqrt{3}=(4-20+15-10)\sqrt{3}=-11\sqrt{3}.$

b) $7\sqrt{12}-4\sqrt{24}+2\sqrt{27}-3\sqrt{48}+\sqrt{96}=7\sqrt{4\cdot3}-4\sqrt{4\cdot6}+2\sqrt{9\cdot3}-3\sqrt{16\cdot3}+\sqrt{16\cdot6}=14\sqrt{3}-8\sqrt{6}+6\sqrt{3}-12\sqrt{3}+4\sqrt{6}=(14+6-12)\sqrt{3}+(-8+4)\sqrt{6}=8\sqrt{3}-4\sqrt{6}.$

c) $a\sqrt{4x}+5\sqrt{9a^2x}+b\sqrt{81x}=2a\sqrt{x}+15a\sqrt{x}+9b\sqrt{x}=(2a+15a+9b)\sqrt{x}=(17a+9b)\sqrt{x}.$

d) $3\sqrt{2x}-\sqrt{9x}-2\sqrt{3x}+4\sqrt{8x}=6\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}-3\sqrt{x}-2\sqrt{3}\sqrt{x}+8\sqrt{2}\sqrt{x}=(3\sqrt{2}-3-2\sqrt{3}+8\sqrt{2})\sqrt{x}=(11\sqrt{2}-2\sqrt{3}-3)\sqrt{x}$

Z określenia pierwiastka arytmetycznego wiemy, że

$$\sqrt{a^2}=a, \qquad \text{gdzie } a>0$$

Weźmy teraz pod uwagę wyrażenie $\sqrt{(a+b)^2}$, gdzie $a+b>0$. Jeżeli przyjmiemy oznaczenie $a+b=c$, a więc $(a+b)^2=c^2$, to mamy

$$\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{c^2}=c=a+b$$

Podobnie

$$\sqrt{(a-b)^2}=a-b, \qquad \text{gdzie } a-b>0$$
$$\sqrt[3]{(a+b)^3}=a+b$$
$$\sqrt[3]{(a-b)^3}=a-b$$

Pamiętając, że $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, mamy także

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=\sqrt{(a+b)^2}=a+b \qquad \text{jeżeli } a+b>0$$

Podobnie

$$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=a-b, \qquad \text{jeżeli } a-b>0$$
$$\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=a+b$$
$$\sqrt[3]{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}=a-b$$

Uwaga. Zapamiętajcie dobrze, że pierwiastków $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$, $\sqrt[3]{a^3+b^3}$, $\sqrt[3]{a^3-b^3}$ i ogólnie $\sqrt[n]{a^n\pm b^n}$ nie wolno obliczać przez obliczanie pierwiastków z poszczególnych składników.

Pytania

1. Napiszcie i uzasadnijcie wzór, na pomocą którego przekształcacie pierwiastek, wyłączając czynnik przed znak pierwiastka.
2. Napiszcie wzór, za pomocą którego włączacie czynnik pod znak pierwiastka.
3. Omówcie sposób postępowania przy wyłączaniu czynnika przed znak pierwiastka, np. z liczby $\sqrt{3168}$.
4. Wyjaśnijcie, jak postępujecie, wyłączając czynnik przed znak pierwiastka, np. z wyrażenia

$$\sqrt[3]{48a^7b^{14}}$$

5. Jak nazwiecie wyrażenia: $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$?

6. Przeprowadźcie redukcję wyrażeń pierwiastkowych podobnych, wyjaśnijcie na czym ona polega i omówcie sposób postępowania na przykładzie:

$$3\sqrt{x}-7\sqrt{x}+a\sqrt{x}+12\sqrt{x}$$

Zadania

1. Wyłączcie największy czynnik przed znak pierwiastka:

a) $\sqrt{12}$ *g) $\sqrt{63}$ *m) $\sqrt{108}$

b) $\sqrt{18}$ *h) $\sqrt{96}$ n) $\sqrt{162}$

c) $\sqrt{32}$ *i) $\sqrt{300}$ *o) $\sqrt{175}$

d) $\sqrt{48}$ j) $\sqrt[3]{24}$ p) $\sqrt[3]{108}$

*e) $\sqrt{50}$ k) $\sqrt[3]{40}$ *r) $\sqrt[4]{162}$

*f) $\sqrt{72}$ *l) $\sqrt[3]{54}$ *s) $\sqrt[4]{48}$

2. Wyłączcie możliwie największy czynnik przed znak pierwiastka:

a) $\sqrt{216}$ g) $\sqrt[3]{1080}$

*b) $\sqrt{288}$ *h) $\sqrt[4]{2592}$

c) $\sqrt{1152}$ i) $\sqrt[3]{27\cdot 18\cdot 45}$

*d) $\sqrt{3675}$ *j) $\sqrt{24\cdot 98\cdot 72}$

*e) $\sqrt{864}$ *k) $\sqrt{175\cdot 42\cdot 66}$

*f) $\sqrt[3]{432}$ *l) $\sqrt[4]{27\cdot 21\cdot 16}$

3. Wyłączcie możliwie największy czynnik przed znak pierwiastka ($a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$):

a) $\sqrt{a^5}$ f) $\sqrt{12a^3bc^6}$

b) $\sqrt{a^{13}}$ g) $\sqrt[3]{16a^4bc^6}$

c) $\sqrt[3]{a^8}$ *h) $\sqrt[3]{27a^3b^5c}$

d) $\sqrt[3]{a^{15}}$ *i) $\sqrt[4]{32a^6b^4c^5}$

e) $\sqrt{a^2b^3}$ j) $\sqrt{\frac{99a^5}{4b^7}}$

k) $\sqrt[3]{\frac{24ab^3}{125c^4}}$

l) $\sqrt{\frac{48}{49a^2b}}$

*m) $\sqrt{\frac{a^2}{3b^3}}$

*n) $\sqrt[4]{\frac{a^6b^{11}c^7}{32}}$

*o) $\sqrt[5]{\frac{32}{3a^6b^7}}$

p) $\sqrt{(a+1)^2}$

r) $\sqrt{a^2+4a+4}$

s) $\sqrt{a^2-6a+9}$, gdzie $a>3$

t) $\sqrt[3]{(a-1)^3}$, gdzie $a>1$

u) $\sqrt[3]{a-3a^2+3a-1}$ „

w) $\sqrt{(a-b)^3}$, gdzie $a-b>0$

z) $\sqrt[3]{(a+b)^5}$, gdzie $a+b>0$

4. Włączcie czynnik pod znak pierwiastka ($a>0$, $b>0$ i $c>0$):

a) $5\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[3]{5}$

*c) $3\sqrt[4]{2}$

*d) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$

e) $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{125}{2}}$

f) $b^2\sqrt{b}$

g) $ab\sqrt{ab}$

h) $2a^2b\sqrt[3]{a^2b}$

i) $\frac{3a}{2b}\sqrt{\frac{8b}{27a}}$

*j) $ab\sqrt[3]{\frac{3}{ab}}$

*k) $\frac{5a^2b^3}{c^2}\sqrt{\frac{ac^7}{5b^3}}$

l) $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$, $a-b>0$, $a+b>0$

m) $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ „ „

5. Napiszcie w postaci jednego pierwiastka:

a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$

b) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$

c) $\sqrt[5]{a^3\sqrt{a}}$

d) $\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^2}}$

*e) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

*f) $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^2\sqrt[3]{a^2}}}$

*g) $\sqrt{2\sqrt[3]{5}}$ *i) $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{5}}}$ *k) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}}$

*h) $\sqrt[4]{3\sqrt{2}}$ *j) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}}$ *l) $\sqrt[3]{\frac{9}{4}\sqrt{\frac{32}{27}}}$

6. Wykonajcie redukcję wyrażeń pierwiastkowych podobnych ($a > 0$):

a) $7\sqrt{3}+4\sqrt{3}-5\sqrt{3}$ d) $\sqrt{a}-5\sqrt{a}+6\sqrt{a}$

*b) $8\sqrt{2}-5\sqrt{2}-\sqrt{2}$ e) $3\sqrt[4]{a^3}+8\sqrt[4]{a^3}-9\sqrt[4]{a^3}$

c) $4\sqrt[3]{4}-10\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{4}$ *f) $\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{a}-3\sqrt[3]{a}-5\sqrt[3]{a}$

7. Wykonajcie redukcję wyrażeń pierwiastkowych podobnych:

*a) $3\sqrt{6}-4\sqrt{2}+8\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

b) $7\sqrt{5}+3\sqrt{2}-10\sqrt{10}-4\sqrt{2}-3\sqrt{5}$

c) $9\sqrt[3]{3}-4\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}+6\sqrt{3}-8\sqrt[3]{3}$

*d) $9\sqrt{a}+18\sqrt[4]{a}+5\sqrt{a}-7\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}$

*e) $11\sqrt{a}-3\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}+2\sqrt{b}-9\sqrt{a}$

8. Wykonajcie redukcję po uprzednim sprowadzeniu pierwiastków do postaci najprostszej:

a) $2\sqrt{12}-\sqrt{48}+4\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{8}+2\sqrt{50}-\sqrt{18}+5\sqrt{32}$

c) $11\sqrt{2}+2\sqrt{98}-7\sqrt{18}$

*d) $\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{2}{3}\sqrt{45}+\frac{1}{5}\sqrt{75}$

e) $4\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{54}-8\sqrt[3]{2}$

*f) $\sqrt{72}+3\sqrt{32}-4\sqrt{12}-7\sqrt{18}+4\sqrt{75}$

*g) $6\sqrt{20}-\sqrt{24}+2\sqrt{125}-\sqrt{80}+\frac{3}{5}\sqrt{150}$

h) $4\sqrt{9a}-\sqrt{25a}+\sqrt{49a}$

i) $5\sqrt{8a}+6\sqrt{72a}-\sqrt{108a}$

*j) $10\sqrt{27a^3}-4\sqrt{108a^3}+5\sqrt{24a}-\sqrt{75a^3}-\sqrt{150a}$

9. Zredukujcie wyrażenia pierwiastkowe podobne:

a) $m\sqrt{a}-n\sqrt{a}+3\sqrt{a}$

b) $p\sqrt[3]{a^2}+5\sqrt[3]{a^2}-q\sqrt[3]{a^2}$

*c) $a\sqrt{m}+b\sqrt{n}+c\sqrt{m}-\sqrt{n}$

*d) $a\sqrt{2m}-3b\sqrt{m}-\sqrt{5m}+\sqrt{m}$

Odpowiedzi

2. a) $6\sqrt{6}$, b) $12\sqrt{2}$, c) $24\sqrt{2}$, d) $35\sqrt{3}$, e) $12\sqrt{6}$, f) $6\sqrt[3]{2}$, g) $6\sqrt[3]{5}$, h) $6\sqrt[4]{2}$, i) $9\sqrt[3]{30}$, j) $168\sqrt{6}$, k) $210\sqrt{11}$, l) $6\sqrt[4]{7}$. **3.** f) $2ac^3\sqrt{3ab}$, g) $2ac^2\sqrt[3]{2ab}$, h) $3ab\sqrt[3]{b^2c}$, i) $2abc\sqrt[4]{2a^2c}$, j) $\frac{3a^2}{2b^3}\sqrt{\frac{11a}{b}}$, k) $\frac{2b}{5c}\sqrt[3]{\frac{3a}{c}}$, l) $\frac{4}{7a}\sqrt{\frac{3}{b}}$, m) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{1}{3b}}=\frac{a}{b\sqrt{3b}}$, n) $\frac{ab^2c}{2}\sqrt[4]{\frac{a^2b^3c^3}{2}}$, o) $\frac{2}{ab\sqrt[5]{3ab^2}}$, w) $(a-b)\sqrt{a-b}$, z) $(a+b)\sqrt[3]{(a+b)^2}$.

4. i) $\sqrt{\frac{2a}{3b}}$, j) $\sqrt[3]{3a^2b^2}$, k) $\sqrt{5a^5b^3c^3}$, l) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, m) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$.

5. a) $\sqrt[4]{a^3}$, b) $\sqrt[6]{a^4}=\sqrt[3]{a^2}$, c) $\sqrt[10]{a^7}$, d) $\sqrt[12]{a^{11}}$, e) $\sqrt[8]{a^7}$, f) $\sqrt[18]{a^{20}}$, g) $\sqrt[6]{40}$, h) $\sqrt[8]{18}$, i) $\sqrt[8]{720}$, j) $\sqrt[12]{162}$, k) $\sqrt{\frac{2}{3}}$, l) $\sqrt[6]{6}$.

7. a) $3\sqrt{6}+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}$, b) $4\sqrt{5}-\sqrt{2}-10\sqrt{10}$, c) $2\sqrt[3]{3}+2\sqrt{3}$, d) $7\sqrt{a}+17\sqrt[4]{a}$, e) $3\sqrt{a}-2\sqrt{b}$. **8.** a) $4\sqrt{3}$, b) $33\sqrt{2}$, c) $4\sqrt{2}$, d) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$, e) $15\sqrt[3]{2}$, f) $12\sqrt{3}-3\sqrt{2}$, g) $18\sqrt{5}+\sqrt{6}$, h) $14\sqrt{a}$, i) $46\sqrt{2a}-6\sqrt{3a}$, j) $5\sqrt{6a}+a\sqrt{3a}$. **9.** a) $(m-n+3)\sqrt{a}$, b) $(p+5-q)\sqrt[3]{a^2}$, c) $(a+c)\sqrt{m}+(b-1)\sqrt{n}$, d) $(a\sqrt{2}-3b-\sqrt{5}+1)\sqrt{m}$.

LEKCJA 13

A. Powtórzenie reguł pierwiastkowania

B. Łączne działania na pierwiastkach

W lekcjach 7—12 podaliśmy podstawowe wzory dotyczące przekształceń pierwiastkowych i działań na pierwiastkach arytmetycznych. Wzory te powtórzymy, zestawiając je kolejno w poniższej ta-

belce. Zakładamy, że występujące w tych wzorach liczby m, n i p są naturalne i większe od 1, zaś liczby a i b są dodatnie.

I Pierwiastek z iloczynu	I′ Iloczyn pierwiastków
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$
II Pierwiastek z ilorazu	**II′ Iloraz pierwiastków**
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$
III Pierwiastek z potęgi	**III′ Potęga pierwiastka**
$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$, gdzie $a > 0$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, gdzie $a > 0$

IV Pierwiastek z pierwiastka

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \text{gdzie} \quad a > 0$$

Zmiana wykładnika pierwiastka

V $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, gdzie $a > 0$	V′ $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$, gdzie $a > 0$
VI Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka	**VI′ Włączanie czynnika pod znak pierwiastka**
$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$	$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$

Wzory podane w tej tabelce stanowią podstawowy materiał teoretyczny I okresu. Należy je dobrze rozumieć, umieć formułować słownie oraz uzasadnić.

Dla ugruntowania tego materiału przerobimy kilka przykładów, rozszerzając zakres ćwiczeń z poprzednich lekcji.

Przykład 1.

Wykonać mnożenie: $(3\sqrt{20}-4\sqrt{75}-\sqrt{80}+4\sqrt{12})\cdot 2\sqrt{12}$

Przed przystąpieniem do mnożenia pierwiastki przekształcimy, sprowadzając je do postaci najprostszej, następnie wykonamy redukcję wyrażeń podobnych. Mnożenie wykonamy zgodnie z regułą mnożenia wielomianu przez jednomian. Otrzymamy więc:

$$(3\sqrt{20}-4\sqrt{75}-\sqrt{80}+4\sqrt{12})\cdot 2\sqrt{12}=$$
$$=(3\sqrt{4\cdot 5}-4\sqrt{25\cdot 3}-\sqrt{16\cdot 5}+4\sqrt{4\cdot 3})\cdot 2\sqrt{4\cdot 3}=$$
$$=(6\sqrt{5}-20\sqrt{3}-4\sqrt{5}+8\sqrt{3})\cdot 4\sqrt{3}=$$
$$=(2\sqrt{5}-12\sqrt{3})\cdot 4\sqrt{3}=8\sqrt{15}-48(\sqrt{3})^2=8\sqrt{15}-144.$$

Przykład 2.

Wykonać mnożenie:

$$(2\sqrt{45}-7\sqrt{8}-\sqrt{20}+4\sqrt{18})\,(3\sqrt{40}+3-\sqrt{90})$$

Podobnie jak w przykładzie 1 sprowadzimy najpierw pierwiastki do postaci najprostszej, w nawiasach zredukujemy wyrażenia podobne, a następnie wykonamy mnożenie zgodnie z regułą mnożenia wielomianu przez wielomian. Otrzymamy więc:

$$(2\sqrt{45}-7\sqrt{8}-\sqrt{20}+4\sqrt{18})\,(3\sqrt{40}+3-\sqrt{90})=$$
$$=(2\sqrt{9\cdot 5}-7\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{4\cdot 5}+4\sqrt{9\cdot 2})\,(3\sqrt{4\cdot 10}+$$
$$+3-\sqrt{9\cdot 10})=(6\sqrt{5}-14\sqrt{2}-2\sqrt{5}+12\sqrt{2})\,(6\sqrt{10}+$$
$$+3-3\sqrt{10})=(4\sqrt{5}-2\sqrt{2})\,(3\sqrt{10}+3)=12\sqrt{50}-6\sqrt{20}+$$
$$+12\sqrt{5}-6\sqrt{2}=12\sqrt{25\cdot 2}-6\sqrt{4\cdot 5}+12\sqrt{5}-6\sqrt{2}=$$
$$=60\sqrt{2}-12\sqrt{5}+12\sqrt{5}-6\sqrt{2}=54\sqrt{2}.$$

Przykład 3.

Wykonać mnożenie: $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\,(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

Zastosujemy znany nam z kursu klasy VIII wzór skróconego mnożenia: $(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2$, który mówi nam, iż iloczyn sumy dwu wyrażeń przez ich różnicę równa się różnicy kwadratów tych wyrażeń.

Otrzymamy więc:

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})\,(\sqrt{5}-\sqrt{3})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2=5-3=2.$$

Na zastosowanie wzoru $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ przerobimy kilka innych przykładów.

Przykład 4.

a) $(4\sqrt{2}-5)(4\sqrt{2}+5) = (4\sqrt{2})^2 - 5^2 = 16 \cdot 2 - 25 = 32-25 = 7$

b) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}) = (2\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 5 - 9 \cdot 2 = 20-18 = 2$

c) $(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}) = (a\sqrt{a})^2 - (b\sqrt{b})^2 = a^2 \cdot a - b^2 \cdot b = a^3-b^3$

d) $(a-\sqrt{a^2-b^2})(a+\sqrt{a^2-b^2}) = a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2 = a^2-(a^2-b^2) = a^2-a^2+b^2 = b^2$

W klasie VIII poznaliśmy, oprócz wzoru

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2,$$

inne jeszcze wzory skróconego mnożenia. Przypomnimy je raz jeszcze:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Zastosujemy je w poniższych przykładach do wyrażeń pierwiastkowych:

Przykład 5.

a) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{10} + 2 = 7 + 2\sqrt{10}$

b) $(\sqrt{7}-3)^2 = (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} + 9 = 7 - 6\sqrt{7} + 9 = 16 - 6\sqrt{7}$

c) $(3\sqrt{7}-2\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = 9 \cdot 7 - 12\sqrt{21} + 4 \cdot 3 = 63 - 12\sqrt{21} + 12 = 75 - 12\sqrt{21}$

d) $(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})^2 = (\sqrt{a+3})^2 + 2\sqrt{a+3} \cdot \sqrt{a-3} + (\sqrt{a-3})^2 = a+3+2\sqrt{(a+3)(a-3)}+a-3 = 2a+2\sqrt{a^2-9}$ $(a > 3)$

Przykład 6.

a) $(\sqrt{7}-\sqrt{2})^3 = (\sqrt{7})^3 - 3\cdot(\sqrt{7})^2\cdot\sqrt{2} + 3\cdot\sqrt{7}\cdot(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3 =$
$= \sqrt{7^3} - 3\cdot 7\cdot\sqrt{2} + 3\cdot\sqrt{7}\cdot 2 - \sqrt{2^3} =$
$= 7\sqrt{7} - 21\sqrt{2} + 6\sqrt{7} - 2\sqrt{2} =$
$= 13\sqrt{7} - 23\sqrt{2}$

b) $(5+\sqrt[3]{4})^3 = 5^3 + 3\cdot 5^2\sqrt[3]{4} + 3\cdot 5\cdot(\sqrt[3]{4})^2 + (\sqrt[3]{4})^3 =$
$= 125 + 75\sqrt[3]{4} + 15\sqrt[3]{16} + 4 =$
$= 129 + 75\sqrt[3]{4} + 30\sqrt[3]{2}$

c) $(3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{3})^3 = (3\sqrt[3]{2})^3 - 3\cdot(3\sqrt[3]{2})^2\cdot 2\sqrt[3]{3} +$
$+ 3\cdot 3\sqrt[3]{2}\cdot(2\sqrt[3]{3})^2 - (2\sqrt[3]{3})^3 = 27\cdot 2 - 3\cdot 9\cdot\sqrt[3]{4}\cdot 2\sqrt[3]{3} +$
$+ 9\sqrt[3]{2}\cdot 4\sqrt[3]{9} - 8\cdot 3 = 54 - 54\sqrt[3]{12} +$
$+ 36\sqrt[3]{18} - 24 = 30 - 54\sqrt[3]{12} + 36\sqrt[3]{18}$

Rozkład różnicy kwadratów dwu wyrażeń na czynniki

W klasie VIII stosowaliśmy często wzór

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

który daje nam rozkład różnicy kwadratów dwu wyrażeń na iloczyn dwu czynników. Według tego wzoru mamy np.:

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$$
$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x+5)(2x-5)$$

W klasie VIII nie umielibyśmy natomiast rozłożyć na czynniki wyrażenia, np.: x^2-3. Stanęlibyśmy przed pytaniem, na które nie znaleźlibyśmy odpowiedzi: jaka to liczba, której kwadrat równa się 3?

Obecnie wiemy, że

$$(\sqrt{3})^2 = 3$$

i ogólnie

$$(\sqrt{a})^2 = a, \qquad \text{gdzie } a > 0$$

Wobec tego

$$x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

Wykonamy kilka innych przykładów:

$$2x^2 - 10 = 2(x^2 - 5) = 2[x^2 - (\sqrt{5})^2] = 2(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$$

$$3x^2 - 7 = 3\left(x^2 - \frac{7}{3}\right) = 3\left[x^2 - \left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2\right] = 3\left(x + \sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$$

$$(x-5)^2 - 2 = (x-5)^2 - (\sqrt{2})^2 = (x - 5 + \sqrt{2})(x - 5 - \sqrt{2})$$

Zadania

1. Wykonajcie mnożenie i przedstawcie wynik w najprostszej postaci:

a) $(8\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 5) \cdot 4\sqrt{5}$

b) $(2\sqrt{2} - \sqrt{12} + \sqrt{18} + 4\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}$

c) $(2\sqrt{18} - 3\sqrt{8} + \sqrt{50}) \cdot 8\sqrt{2}$

*d) $(3\sqrt{32} - 4\sqrt{20} + \sqrt{18} + \sqrt{80}) \cdot 3\sqrt{5}$

*e) $(7\sqrt{8} - 2\sqrt{32} + 4\sqrt{50} - 5\sqrt{72} + \sqrt{12}) \cdot 3\sqrt{18}$

*f) $(8\sqrt{75} - 6\sqrt{48} + \sqrt{162} - 4\sqrt{27}) \cdot 2\sqrt{12}$

g) $(\sqrt{27} - 2\sqrt{8})(2\sqrt{12} + \sqrt{32})$

h) $(5\sqrt{18} - 2\sqrt{48})(3\sqrt{2} + \sqrt{3})$

*i) $(\sqrt{98} - \sqrt{50} + 2\sqrt{20})(3\sqrt{8} - 2\sqrt{45})$

*j) $(5\sqrt{27} - \sqrt{8} - 2\sqrt{48})(2\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{12})$

k) $(2\sqrt{a} - 3\sqrt{b})(4\sqrt{a} + \sqrt{b})$

l) $(3\sqrt{a} - 5)(6 + \sqrt{a})$

*m) $(2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(3\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{9})$

*n) $(2\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 5)(\sqrt[3]{a} - 3)$

2. Wykonajcie stosując wzory uproszczonego mnożenia:

a) $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$

*b) $(6 - \sqrt{15})(6 + \sqrt{15})$

c) $(\sqrt{10} + \sqrt{6})(\sqrt{10} - \sqrt{6})$

d) $(3\sqrt{2} - 4)(3\sqrt{2} + 4)$

e) $(5\sqrt{3} + 2\sqrt{7})(5\sqrt{3} - 2\sqrt{7})$

f) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

g) $(\sqrt{a - 2b} + \sqrt{a + 2b})(\sqrt{a - 2b} - \sqrt{a + 2b})$

h) $(\sqrt{a^2 + b^2} + a)(\sqrt{a^2 + b^2} - a)$

i) $(a-\sqrt{a^2-b^2})\,(a+\sqrt{a^2-b^2})$

*j) $(-b-\sqrt{b^2-4ac})\,(-b+\sqrt{b^2-4ac})$

3. Wykonajcie działania i przedstawcie wynik w najprostszej postaci:

a) $(\sqrt{3}-1)^2$

*b) $(5+\sqrt{2})^2$

c) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$

*d) $(2\sqrt{7}-1)^2$

e) $(4\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$

f) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$

*g) $(2\sqrt{5}-\sqrt{15})^2$

*h) $(\sqrt{10}+3\sqrt{5})^2$

i) $(\sqrt{6}+2)^2-(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2+(\sqrt{15}-\sqrt{7})\,(\sqrt{15}+\sqrt{7})$

j) $(4+\sqrt{11})\,(4-\sqrt{11})-(4\sqrt{5}-\sqrt{3})^2+(8-2\sqrt{15})^2$

k) $(9-3\sqrt{7})\,(9+3\sqrt{7})-(2\sqrt{6}-5\sqrt{3})^2$

l) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$

**m) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$

**n) $\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$

4. Wykonajcie działania i wynik przedstawcie w najprostszej postaci (zakładamy, że wyrażenia podpierwiastkowe są dodatnie):

a) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

b) $(\sqrt{2a}+\sqrt{3b})^2$

c) $(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2$

*d) $(5\sqrt{2a}+4\sqrt{3b})^2$

*e) $(3a-2\sqrt{b})^2$

*f) $(a-\sqrt{a^2-b^2})^2$

g) $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2$

*h) $(\sqrt{3a-b}+\sqrt{3a+b})^2$

*i) $\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2$

*j) $\left(\sqrt{\frac{a-3}{a+2}}+\sqrt{\frac{a+2}{a-3}}\right)^2$

5. Wykonajcie działania i wynik przedstawcie w najprostszej postaci:

a) $(\sqrt{5}+3)^3$

*b) $(4-\sqrt{2})^3$

c) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^3$

d) $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3})^3$

*e) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^3$

*f) $(2\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{2})^3$

g) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3+(2\sqrt{3}-5)^2-(4+3\sqrt{2})^2$

*h) $(\sqrt{21}+3)^3-(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2+(2\sqrt{7}-5)(2\sqrt{7}+5)$

6. Rozłóżcie na czynniki:

a) x^2-1

b) x^2-5

c) x^2-a^2

d) x^2-a, gdy $a>0$

*e) $3x^2-4$

*f) $5x^2-7$

g) $(x-4)^2-10$

h) $(x-a)^2-b$, gdy $b>0$

Odpowiedzi

1. b) $10\sqrt{6}+12$, c) 80, d) $45\sqrt{10}-60$, e) $18\sqrt{6}-72$, f) $48+36\sqrt{6}$, g) $4-4\sqrt{6}$, h) $66-9\sqrt{6}$, i) $12\sqrt{10}-96$, j) $42-4\sqrt{6}-21\sqrt{2}+4\sqrt{3}$, k) $8a-10\sqrt{ab}-3b$, l) $3a+13\sqrt{a}-30$, m) $9+3\sqrt[3]{12}-2\sqrt[3]{18}$, n) $2a-7\sqrt[3]{a^2}+8\sqrt[3]{a}-15$.

2. a) 1, b) 21, c) 4, d) 2, e) 47, f) $a-b$, g) $-4b$, h) b^2, i) b^2, j) $4ac$.

3. a) $4-2\sqrt{3}$, b) $27+10\sqrt{2}$, c) $9-6\sqrt{2}$, d) $29-4\sqrt{7}$, e) $82+8\sqrt{10}$, f) $30-12\sqrt{6}$, g) $35-20\sqrt{3}$, h) $55+30\sqrt{2}$, i) 7, j) $46-24\sqrt{15}$, k) $-81+60\sqrt{2}$, l) 14, m) 10, n) 4.

4. a) $a+2\sqrt{ab}+b$, b) $2a+2\sqrt{6ab}+3b$, c) $4a+12\sqrt{ab}+9b$, d) $50a+40\sqrt{6ab}+48b$, e) $9a^2-12a\sqrt{b}+4b$, f) $2a^2-b^2-2a\sqrt{a^2-b^2}$, g) $2a-2\sqrt{a^2-b^2}$, h) $6a+2\sqrt{9a^2-b^2}$, i) $2a-2\sqrt{a^2-b}$, j) $\dfrac{(2a-1)^2}{(a+2)(a-3)}$.

5. a) $72+32\sqrt{5}$, b) $88-50\sqrt{2}$, c) $12\sqrt{6}+20\sqrt{2}$, d) $4-3\sqrt[3]{147}+3\sqrt[3]{63}$, e) $148\sqrt{5}-234\sqrt{2}$, f) $-14-36\sqrt[3]{50}+54\sqrt[3]{20}$, g) $3-11\sqrt{3}-35\sqrt{2}$, h) $50\sqrt{21}+209$.

6. b) $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$, d) $(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$,

e) $3\left(x+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, f) $5\left(x+\sqrt{\dfrac{7}{5}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{7}{5}}\right)$,

g) $(x-4+\sqrt{10})(x-4-\sqrt{10})$,

h) $(x-a+\sqrt{b})(x-a-\sqrt{b})$.

LEKCJE 14 i 15

Uwalnianie mianownika ułamka od niewymierności

Przypuśćmy, że mamy ułamek $\frac{1}{\sqrt{2}}$, a chcemy obliczyć przybliżoną jego wartość i podać ją w postaci ułamka dziesiętnego. Należałoby wtedy obliczyć $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ i wykonać działanie

$$1:1{,}4142$$

Ze względu na dzielenie przez liczbę pięciocyfrową rachunek byłby żmudny i zabrałby dużo czasu. Dla uniknięcia tych trudności staramy się ułamek przekształcić tak, by w jego mianowniku nie występował pierwiastek.

Jak wiemy, wartość ułamka nie ulega zmianie, gdy jego licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę, różną od zera. Zachodzi więc pytanie, przez jaką liczbę należy pomnożyć $\sqrt{2}$, by w wyniku otrzymać liczbę wymierną. Oczywiście od razu odpowiadamy, iż należy pomnożyć ją przez $\sqrt{2}$, gdyż

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

przekształcenie ułamka będzie więc następujące:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1{,}4142}{2} = 0{,}7071$$

Jak widzimy, uprościliśmy znacznie rachunek, gdyż zamiast dzielenia przez liczbę pięciocyfrową wykonaliśmy dzielenie przez liczbę jednocyfrową.

Postępowanie mające na celu przekształcenie ułamka i uzyskanie w mianowniku liczby wymiernej będziemy nazywali uwalnianiem mianownika ułamka od niewymierności.

Rozpatrzymy różne ułamki zależnie od tego, w jakiej postaci występuje niewymierność w mianowniku.

I. W mianowniku ułamka występuje tylko sam pierwiastek kwadratowy lub iloczyn liczby całkowitej przez pierwiastek kwadratowy. Przypadek ten omawialiśmy już, wykonamy jednak dalsze ćwiczenia.

Przykład 1.

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

b) $\dfrac{2}{3\sqrt{7}} = \dfrac{2\cdot\sqrt{7}}{3\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{3\cdot 7} = \dfrac{2\sqrt{7}}{21}$

c) $\dfrac{5\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} = \dfrac{(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})\sqrt{6}}{4\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{12}-2\sqrt{18}}{4\cdot 6} =$

$= \dfrac{10\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{24} = \dfrac{2(5\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{24} = \dfrac{5\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12}$

d) $\sqrt{\dfrac{5}{6}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$

Mamy więc regułę: **Aby uwolnić mianownik ułamka od niewymierności w przypadku, gdy w mianowniku występuje tylko pierwiastek kwadratowy lub iloczyn liczby całkowitej przez pierwiastek kwadratowy, należy licznik i mianownik ułamka pomnożyć przez ten pierwiastek.**

II) W mianowniku ułamka występuje tylko pierwiastek stopnia wyższego, niż drugi albo iloczyn liczby całkowitej przez taki pierwiastek.

Weźmy ułamki: 1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$, 2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$, 3) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$, 4) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$ $(a > 0,\ k < n)$

Ułamki te chcemy tak przekształcić, by mianownik był wymierny. Należy więc licznik i mianownik pomnożyć przez taką liczbę x, aby

1) $\sqrt[3]{a}\cdot x = \sqrt[3]{a^3}$, stąd $x = \sqrt[3]{a^3} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2}$
2) $\sqrt[4]{a^3}\cdot x = \sqrt[4]{a^4}$ „ $x = \sqrt[4]{a}$
3) $\sqrt[5]{a^2}\cdot x = \sqrt[5]{a^5}$ „ $x = \sqrt[5]{a^3}$
4) $\sqrt[n]{a^k}\cdot x = \sqrt[n]{a^n}$ „ $x = \sqrt[n]{a^{n-k}}$

itp.

A więc

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1\cdot\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{1\cdot\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a^4}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{a}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{1\cdot\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[5]{a^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{a}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^k}} = \frac{1\cdot\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^k}\cdot\sqrt[n]{a^{n-k}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}$$

Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka w przypadku, gdy w mianowniku występuje tylko pierwiastek w postaci $\sqrt[n]{a^k}$ przy $a > 0$ i $n > k > 1$, albo też iloczyn liczby wymiernej przez $\sqrt[n]{a^k}$, należy licznik i mianownik ułamka pomnożyć przez $\sqrt[n]{a^{n-k}}$.

Przykład 2.

a) $$\frac{5}{2\sqrt[4]{3}} = \frac{5\cdot\sqrt[4]{3^3}}{2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3^3}} = \frac{5\sqrt[4]{27}}{2\sqrt[4]{3^4}} = \frac{5\sqrt[4]{27}}{6}$$

b) $$\frac{6}{5\sqrt[3]{4}} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{5\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{5\sqrt[3]{2^3}} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{5\cdot 2} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{5}$$

c) $$\frac{3ab}{4\sqrt[4]{8a^3b^2c}} = \frac{3ab\cdot\sqrt[4]{2ab^2c^3}}{4\sqrt[4]{2^3a^3b^2c}\cdot\sqrt[4]{2ab^2c^3}} = \frac{3ab\sqrt[4]{2ab^2c^3}}{4\sqrt[4]{2^4a^4b^4c^4}} =$$

$$= \frac{3ab\sqrt[4]{2ab^2c^3}}{4\cdot 2abc} = \frac{3\sqrt[4]{2ab^2c^3}}{8c}$$

III. W mianowniku ułamka występuje pierwiastek kwadratowy jako składnik.

Weźmy przykład: $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

W danym przypadku należy licznik i mianownik ułamka pomnożyć przez $\sqrt{5}-\sqrt{2}$. Otrzymamy wtedy w mianowniku różnicę kwadratów dwu liczb i w wyniku liczbę wymierną.

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{1\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})\,(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

Przykład 3.

a) $$\frac{2}{2-\sqrt{3}} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{4-3} =$$
$$= 2(2+\sqrt{3})$$

b) $$\frac{\sqrt{6}+4}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{6}+4)(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})} =$$
$$= \frac{3\sqrt{12}+12\sqrt{2}+2\sqrt{18}+8\sqrt{3}}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{6\sqrt{3}+12\sqrt{2}+6\sqrt{2}+8\sqrt{3}}{9\cdot 2-4\cdot 3} =$$
$$= \frac{14\sqrt{3}+18\sqrt{2}}{6} = \frac{2(7\sqrt{3}+9\sqrt{2})}{6} = \frac{7\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{3}$$

c) $$\frac{6\sqrt{3}-7\sqrt{2}}{6\sqrt{3}+7\sqrt{2}} = \frac{(6\sqrt{3}-7\sqrt{2})^2}{(6\sqrt{3}+7\sqrt{2})(6\sqrt{3}-7\sqrt{2})} =$$
$$= \frac{(6\sqrt{3})^2-2\cdot 6\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{2}+(7\sqrt{2})^2}{(6\sqrt{3})^2-(7\sqrt{2})^2} = \frac{108-84\sqrt{6}+98}{108-98} =$$
$$= \frac{206-84\sqrt{6}}{10} = \frac{2(103-42\sqrt{6})}{10} = \frac{103-42\sqrt{6}}{5}$$

d) $$\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} = \frac{1\cdot(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})}{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})} =$$
$$= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a-b})^2} = \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{(a+b)-(a-b)} =$$
$$= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{a+b-a+b} = \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{2b}$$

Zakładamy, iż $a+b>0$, $a-b>0$ oraz $a+b \neq a-b$

Z powyższych przykładów wyciągamy wniosek:

Aby uwolnić mianownik ułamka od niewymierności w wypadku, gdy w mianowniku występuje suma dwu wyrażeń, z których jedno lub oba zawierają pierwiastek kwadratowy, należy licznik i mianownik pomnożyć przez różnicę tych wyrażeń, i odwrotnie, jeżeli w mianowniku występuje różnica takich wyrażeń, to mnożymy licznik i mianownik przez sumę tych wyrażeń.

W obu przypadkach otrzymujemy w mianowniku różnicę kwadratów tych wyrażeń, czyli liczbę wymierną.

Pytania

1. Wyjaśnijcie, w jakim celu przekształcamy ułamki tak, by uwolnić mianownik od niewymierności.
2. Jak postępujemy, by usunąć niewymierność z mianownika, gdy występuje w nim:
   a) tylko pierwiastek kwadratowy,
   b) iloczyn liczby wymiernej przez pierwiastek kwadratowy,
   c) tylko jeden pierwiastek mający np. postać $\sqrt[3]{a}$,
   d) iloczyn liczby wymiernej przez pierwiastek, np. $2\sqrt[3]{a^2}$,
   e) suma dwu wyrażeń, z których jedno lub oba zawierają niewymierność w postaci pierwiastka kwadratowego,
   f) różnica dwu wyrażeń, z których jedno lub oba zawierają niewymierność w postaci pierwiastka kwadratowego.

Zadania

1. Uwolnijcie mianowniki ułamków od niewymierności:

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ d) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ g) $14\sqrt{\frac{1}{7}}$

b) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$ e) $\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{5}}$ h) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

*c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ *f) $\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}$ *i) $\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}$

2. Uwolnijcie mianowniki ułamków od niewymierności:

a) $\frac{2}{\sqrt{12}}$ d) $\frac{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ *g) $\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{48}}$

b) $\frac{1}{2\sqrt{18}}$ e) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{50}}$ *h) $\frac{\sqrt{18}+\sqrt{5}}{3\sqrt{8}}$

c) $\frac{5\sqrt{24}}{2\sqrt{5}}$ *f) $\frac{9}{2\sqrt{72}}$ *i) $\frac{\sqrt{50}+\sqrt{75}}{5\sqrt{300}}$

Uwaga. Przed zniesieniem niewymierności należy pierwiastek w mianowniku przedstawić w prostszej postaci, wyłączając czynnik przed znak pierwiastka.

3. Uwolnijcie mianowniki ułamków od niewymierności:

a) $\frac{a}{\sqrt{a}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{12a^3}}$ *g) $\frac{14ab^2c^3}{\sqrt{7a^3bc^5}}$

b) $\frac{x}{2\sqrt{x}}$ e) $\frac{5\sqrt{a}}{\sqrt{5b}}$ *h) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$

c) $\frac{2}{\sqrt{2x}}$ f) $\frac{4a^2b^3}{5\sqrt{2ab}}$ *i) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{ab}}$

Uwaga. Zakładamy, że wyrażenia podpierwiastkowe w zadaniach 3, 4 i 6 są dodatnie.

4. Uwolnijcie mianowniki ułamków od niewymierności:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ d) $\frac{a}{\sqrt[3]{a}}$ *g) $\frac{1}{\sqrt[3]{4ab^2c}}$

b) $\frac{24}{\sqrt[3]{9}}$ e) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ *h) $\frac{12a^2bc}{\sqrt[3]{9ab^2}}$

c) $\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$ f) $\frac{ab}{\sqrt[4]{a}}$ *i) $\frac{18a^5b^4c}{\sqrt[4]{8ab^3c^2}}$

5. Uwolnijcie mianowniki ułamków od niewymierności:

a) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ e) $\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}$ i) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

b) $\frac{4}{3+\sqrt{5}}$ f) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ j) $\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

*c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$ *g) $\frac{16}{3\sqrt{5}-7}$ *k) $\frac{2\sqrt{6}+5}{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

*d) $\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ *h) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ *l) $\frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{7\sqrt{3}-5\sqrt{5}}$

6. Uwolnijcie mianowniki ułamków od niewymierności:

a) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

*)c $\frac{a-1}{\sqrt{a}+1}$

d) $\frac{3+\sqrt{a}}{3-\sqrt{a}}$

*e) $\frac{a^3-b^3}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$

f) $\frac{ab}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$

g) $\frac{4}{a-\sqrt{a^2-4}}$

h) $\frac{5}{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-3}}$

*i) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-\sqrt{b}}}$

*j) $\frac{a-1}{\sqrt{a-\sqrt{2a-1}}}$

*k) $\frac{b^2}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$

*l) $\frac{x+y}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-y}}$

*m) $\frac{2b}{\sqrt{a-\sqrt{a^2-4b^2}}}$

*n) $\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$

7. Wykonajcie działania:

a) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{10}}$

*b) $\frac{3}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{7}{\sqrt{15}}$

*c) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}-\frac{5}{\sqrt{5}}$

*e) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{3}-5}{2+\sqrt{3}}-\frac{24-5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

**f) $\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4-\sqrt{6}}+\frac{2\sqrt{6}-3}{\sqrt{6}-1}+\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}-\frac{17}{5\sqrt{2}}$

**g) $\frac{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{5\sqrt{3}+6\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}+\frac{48}{\sqrt{6}}$

Odpowiedzi

3. a) $\sqrt{a}$, b) $\frac{\sqrt{x}}{2}$, c) $\frac{\sqrt{2x}}{x}$, d) $\frac{\sqrt{3a}}{a^2}$, e) $\frac{\sqrt{5ab}}{b}$, f) $\frac{2ab^2\sqrt{2ab}}{5}$,

g) $\frac{2b\sqrt{7abc}}{a}$, h) $\frac{\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{c}$, i) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a^2b}$.

4. a) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$, b) $8\sqrt[3]{3}$, c) $\sqrt[4]{2}$, d) $\sqrt[3]{a^2}$, e) $\frac{\sqrt[3]{a}}{a}$, f) $b\sqrt[4]{a^3}$, g) $\frac{\sqrt[3]{2a^2bc^2}}{2abc}$, h) $4ac\sqrt[3]{3a^2b}$, i) $9a^4b^3\sqrt[4]{2a^3bc^2}$.

5. a) $2+\sqrt{3}$, b) $3-\sqrt{5}$, c) $\sqrt{2}(\sqrt{5}+2)$, d) $3(\sqrt{5}-\sqrt{3})$, e) $6+\sqrt{6}$, f) $6-\sqrt{35}$, g) $-4(3\sqrt{5}+7)$, h) $3+2\sqrt{2}$, i) $5+2\sqrt{6}$, j) $\frac{8\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{3}$, k) $\frac{9\sqrt{2}+8\sqrt{3}}{30}$, l) $\frac{17+3\sqrt{15}}{11}$.

6. a) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$, b) $\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$, c) $\sqrt{a}-1$, d) $\frac{9+6\sqrt{a}+a}{9-a}$, e) $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}$, f) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a-b}$, g) $a+\sqrt{a^2-4}$, h) $\sqrt{a+2}+\sqrt{a-3}$, i) $\sqrt{a}-\sqrt{a-\sqrt{b}}$, j) $\sqrt{a+\sqrt{2a-1}}$, k) $a+\sqrt{a^2-b^2}$, l) $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-y}$, m) $\sqrt{a+\sqrt{a^2-4b^2}}$, n) $\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

7. a) $\frac{23\sqrt{10}}{30}$, b) $\frac{9\sqrt{5}+20\sqrt{3}-7\sqrt{15}}{15}$, c) 14, d) 0, e) -12, f) $\frac{3\sqrt{3}+9}{5}$, g) $-32\sqrt{6}$.

LEKCJA 16

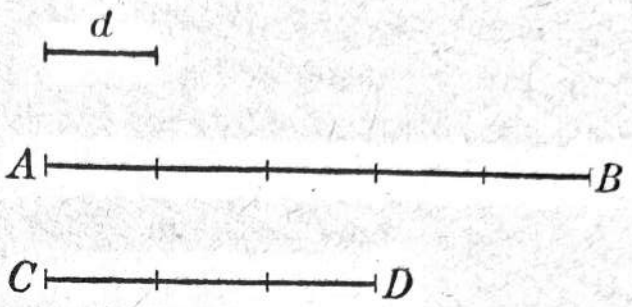
Odcinki współmierne i niewspółmierne

Rozpoczynamy obecnie naukę geometrii. Pierwsze lekcje będą poświęcone zagadnieniu mierzenia odcinków. Z zagadnieniem tym spotkaliście się z pewnością już nieraz na gruncie praktycznym. Teraz zobaczycie, jak interesująco przedstawia się ten problem od strony teorii. Dzisiejsza lekcja ma charakter wstępny. Dowiecie się z niej, jakie dwa odcinki nazywamy **współmiernymi**, a jakie **niewspółmiernymi**.

Przykład 1. Obierzmy niewielki odcinek d i narysujmy dwa odcinki

$$AB = 5d \quad \text{i} \quad CD = 3d \qquad \text{(rys. 4)}$$

Odcinek d mieści się całkowitą liczbę razy w odcinku AB i całkowitą liczbę razy w odcinku CD. Powiadamy, że odcinek d jest **wspólną miarą** odcinków AB i CD. O odcinkach AB i CD zaś mówimy, że mają **wspólną miarę** lub krócej, że są **współmierne.**



Rys. 4

OKREŚLENIE. **Dwa odcinki a i b nazywamy współmiernymi, jeżeli istnieje taki odcinek d, który mieści się całkowitą liczbę razy w odcinku a i całkowitą liczbę razy w odcinku b. Odcinek d nazywamy wspólną miarą odcinków a i b.**

Patrząc na rys. 4 widzimy, że odcinek AB stanowi $\frac{5}{3}$ odcinka CD. Zatem, jeśli odcinki AB i CD są współmierne oraz $AB = 5d$ i $CD = 3d$, to $AB = \frac{5}{3} CD$.

Odwrotnie, jeśli wiemy, że $AB = \frac{5}{3} CD$, to mamy pewność, że AB i CD są odcinkami współmiernymi. Wynika to bezpośrednio z samego określenia ułamka. Istotnie, równość $AB = \frac{5}{3} CD$ oznacza, że jeśli odcinek CD podzielimy na 3 równe części i zbudujemy odcinek równy 5 takim częściom, to otrzymamy odcinek równy AB. Odcinki AB i CD mają więc wspólną miarę, jest nią $\frac{1}{3} CD$.

Z powyższych rozważań wynika, że współmierność odcinków a i b możemy zapisać ogólnie dwoma sposobami:

$$a = m \cdot d, \quad b = n \cdot d \quad (m \text{ i } n \text{ — liczby całkowite})$$

albo też tak:

$$a = \frac{m}{n} \cdot b \quad (m \text{ i } n \text{ — liczby całkowite})$$

Rozważmy jeszcze jeden przykład odcinków współmiernych.

Przykład 2. Obliczyć wspólną miarę odcinków $a = 2\frac{1}{2}$ cm i $b = 3\frac{2}{3}$ cm.

Rozwiązanie. Zamieniając liczby mieszane na ułamki niewłaściwe, a następnie sprowadzając te ułamki do wspólnego mianownika, otrzymujemy

$$a = \frac{5}{2}\text{ cm} = \frac{15}{6}\text{ cm} = 15\cdot\frac{1}{6}\text{ cm}, \quad b = \frac{11}{3}\text{ cm} = \frac{22}{6}\text{ cm} = 22\cdot\frac{1}{6}\text{ cm}.$$

Stąd wnioskujemy, że wspólną miarą odcinków a i b jest $\frac{1}{6}$ cm. Odcinek $\frac{1}{6}$ cm mieści się 15 razy w odcinku a i 22 razy w odcinku b.

Stawiamy teraz pytanie: czy każde dwa odcinki są współmierne?

Sądząc powierzchownie, można by przypuszczać, że tak. Przecież — podpowiada nam intuicja — jeśli jeden z dwóch danych odcinków będziemy dzielić na coraz mniejsze cząstki, to w końcu musimy dojść do tak króciutkiego odcinka, że pomieści się on całkowitą liczbę razy i w drugim odcinku.

Okazuje się jednak, że intuicji za bardzo ufać nie można. Przekonamy się za chwilę, że istnieją pary **odcinków niewspółmiernych**, to znaczy pary takich odcinków, dla których żaden odcinek, nawet najkrótszy, nie jest wspólną miarą.

TWIERDZENIE. **Przekątna i bok tego samego kwadratu stanowią parę odcinków niewspółmiernych.**

Założenie. Odcinek a jest bokiem kwadratu, odcinek b jest przekątną tegoż kwadratu.

Teza. Odcinki a i b są niewspółmierne.

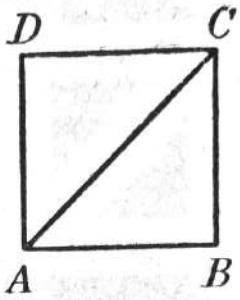
Dowód. Niech będzie dany kwadrat $ABCD$, w którym $A = BC = CD = DA = a$, $AC = b$ (rys. 5a).

Mamy dowieść, że odcinki a i b są niewspółmierne.

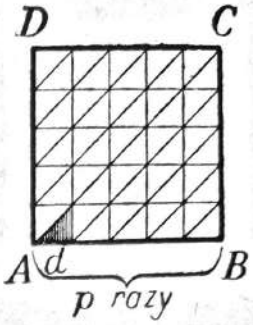
Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuścimy, że odcinki a i b są współmierne, a następnie wykażemy, że przypuszczenie to prowadzi do niedorzeczności. Rozumujemy tak:

Przypuśćmy, że odcinki a i b są współmierne, to znaczy, że istnieje pewien odcinek d, który w odcinku a mieści się p razy, a w odcinku b mieści się q razy (p i q oznaczają liczby całkowite)

$$a = p \cdot d, \quad b = q \cdot d$$



Rys. 5a

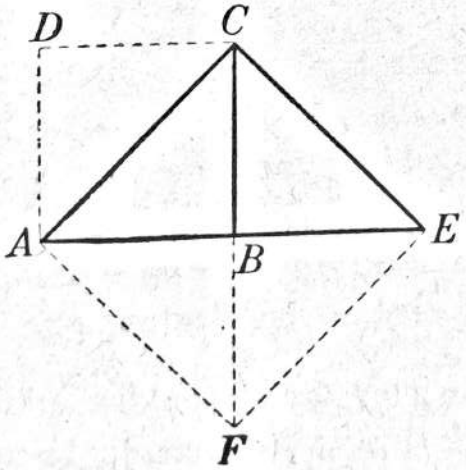


Rys. 5b

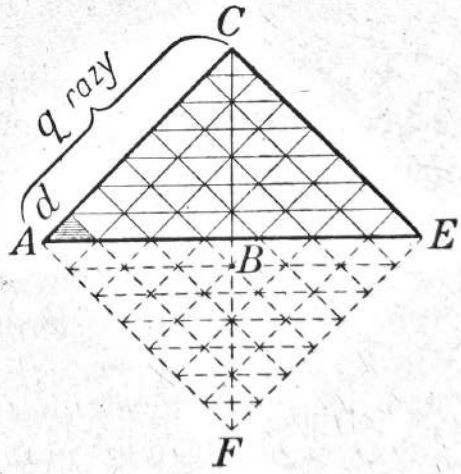
Podzielmy kwadrat $ABCD$ na kwadraciki o boku d (rys. 5b). Ponieważ — jak to przypuściliśmy — odcinek d mieści się w boku kwadratu p razy, przeto tych małych kwadracików otrzymamy $p \cdot p$, czyli p^2.

Podzielmy następnie każdy z małych kwadracików na dwa równe trójkąciki, jak pokazano na rys. 5b. Liczba tych trójkącików w kwadracie $ABCD$ wyniesie oczywiście $2p^2$.

Zapamiętajmy: kwadrat $ABCD$ został podzielony na $2p^2$ trójkącików.



Rys. 6a



Rys. 6b

Z kolei rozetnijmy kwadrat $ABCD$ wzdłuż przekątnej AC i przyłóżmy trójkąt ACD do boku BC. Otrzymamy trójkąt prostokątny i równoramienny ACE, który następnie uzupełniamy do kwadratu $AFEC$ (rys. 6a).

Bok kwadratu $AFEC$ jest równy przekątnej b kwadratu $ABCD$, wobec tego — zgodnie z naszym przypuszczeniem — odcinek d (wspólna miara) mieści się w boku kwadratu $AFEC$ q razy.

Zatem, jeśli ten kwadrat podzielimy najpierw na kwadraciki o boku d, a następnie każdy z tych kwadracików podzielimy na dwa trójkąciki, to wszystkich kwadracików będzie q^2, a wszystkich trójkącików będzie $2q^2$ (rys. 6b).

Stąd już łatwo wnosimy, że liczba małych trójkącików pokrywających trójkąt AEC wynosi q^2.

Zestawiamy: Wyżej pokazaliśmy, że kwadrat $ABCD$ został podzielony na $2p^2$ trójkącików, teraz zaś wykazaliśmy, że $\triangle AEC$ został podzielony na q^2 takich samych trójkącików. Ale $\triangle AEC$ został złożony z dwóch połówek kwadratu $ABCD$, wobec tego liczba trójkącików zawartych w kwadracie $ABCD$ musi być równa liczbie trójkącików zawartych w trójkącie AEC. W ten sposób dochodzimy do równości

$$q^2 = 2p^2$$

w której p i q oznaczają liczby całkowite.

Lecz równość ta jest sprzeczna, gdyż z niej wynikałoby, że

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2 = 2$$

czyli że istnieje ułamek, którego kwadrat równa się 2, co — jak wiemy z lekcji 2 — nie jest prawdą.

Zatem istotnie przypuszczenie zrobione na początku dowodu, że odcinki a i b są współmierne, doprowadziło do niedorzeczności. Przypuszczenie to jest więc błędne. Odcinki a i b nie są współmierne.

W ten sposób nasze twierdzenie zostało udowodnione.

Uwaga. Istnieje nieskończenie wiele par odcinków niewspółmiernych. Oto niektóre z nich: bok i wysokość trójkąta równobocznego, przeciwprostokątna i każda z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 4 cm i 5 cm (i wielu innych trójkątów prostokątnych), bok dziesięciokąta foremnego wpisanego w okrąg i promień tego okręgu.

Jak zobaczymy w następnej lekcji, istnienie odcinków niewspółmiernych stanowi jeden z najważniejszych i najciekawszych

faktów matematycznych. Odkrycie istnienia odcinków niewspółmiernych jest zasługą Pitagorejczyków*).

Pytania

1. Jakie dwa odcinki nazywamy współmiernymi?
   Dajcie przykład odcinków współmiernych.
2. Jakie dwa odcinki nazywamy niewspółmiernymi?
   Udowodnijcie, że przekątna kwadratu i jego bok są odcinkami niewspółmiernymi.

LEKCJA 17

O mierzeniu odcinków i o liczbach niewymiernych

Po zaznajomieniu się z odcinkami współmiernymi i niewspółmiernymi przystępujemy do właściwego tematu zapowiedzianego w lekcji poprzedniej, to jest do omówienia zagadnienia mierzenia odcinków.

Jednostka miary długości

Ktoś mówi do mnie, że ma w domu pręt długości 3 m. Nie widzę tego pręta, a mimo to mam dość jasne wyobrażenie, jak długi jest ów pręt. Dlaczego? Dlatego, że znam dobrze odcinek zwany metrem. Metr jest odcinkiem znanym na całym świecie i niemal przez cały świat uznanym za odcinek jednostkowy**).

---

*) Pitagoras z Samos, jeden z najwybitniejszych filozofów i matematyków świata starożytnego, odkrywca szeregu ważnych twierdzeń, żył w drugiej połowie VI w. przed naszą erą. Zgromadził wokół siebie wielu uczniów, którzy kontynuowali potem jego dzieło. W ten sposób powstała tzw. pitagorejska szkoła filozoficzna. Pitagorejczycy, wśród których było wiele wybitnych jednostek, tworzyli zdyscyplinowaną organizację (coś w rodzaju bractwa zakonnego) i przez długie lata wywierali niemały wpływ na życie umysłowe i polityczne Grecji.

**) W Polsce metr stał się obowiązującą jednostką długości na mocy dekretu Naczelnika Państwa z dnia 8.II.1919 r. Przedtem używano innych jednostek, jak łokieć, stopa, arszyn itp.

W Anglii, USA i innych krajach anglosaskich po dziś dzień obok metra są w użyciu jardy i stopy angielskie. Rzecz ciekawa, że np. długość nici na szpulkach podawana jest również u nas w jardach.

Jard = 91,4 cm.

W procesie mierzenia porównujemy odcinek mierzony z tym odcinkiem jednostkowym (lub z jakąś jego częścią albo wielokrotnością).

Wzorzec metra wykonany z odpornego na zmiany chemiczne materiału jest przechowywany w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sêvres pod Paryżem. Kopie tego wzorca znajdują się w każdym kraju i one to stanowią podstawę do kontroli, czy jednostki długości będące w powszechnym użyciu są rzetelne.

Metr jest w wielu wypadkach jednostką zbyt małą, w innych znowu zbyt wielką, dlatego obok metra używa się też wielokrotności i części metra. Niektóre z nich przypominamy poniżej:

1 kilometr (1 km)	= 1000 m
1 hektometr (1 hm)	= 100 m
1 dekametr (1 dam)	= 10 m
1 metr	
1 decymetr (1 dm)	= 0,1 m
1 centymetr (1 cm)	= 0,01 m
1 milimetr (1 mm)	= 0,001 m

Nasuwa się pytanie: czy metr jest jedynym do przyjęcia podstawowym odcinkiem jednostkowym? Odpowiedź na to pytanie jest przecząca. Wybór takiego czy innego odcinka jednostkowego jest kwestią umowy między ludźmi.

Wzmianka historyczna

Przy końcu XVIII w. uczeni francuscy wystąpili z projektem wprowadzenia takiej jednostki długości, która byłaby równa dziesięciomilionowej części ćwiartki południka ziemskiego, przechodzącego przez Paryż. Po długotrwałych i żmudnych pomiarach geodezyjnych sporządzili wzorzec nowej jednostki nazwanej metrem. Późniejsze, znacznie dokładniejsze pomiary wykazały, że metr wzorcowy (międzynarodowy) jest o około 0,1 mm krótszy od $\frac{1}{10000000}$ ćwiartki południka ziemskiego.

Miara długości odcinka

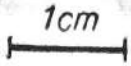
Jak już wyżej wspominaliśmy, zmierzyć odcinek to znaczy porównać go z odcinkiem przyjętym za jednostkę długości. W pro-

cesie mierzenia występują więc co najmniej dwa odcinki: mierzony i jednostkowy. Wobec tego mogą zdarzyć się dwa przypadki:

1. Odcinek mierzony jest współmierny z odcinkiem jednostkowym.

2. Odcinek mierzony jest niewspółmierny z odcinkiem jednostkowym.

W pierwszym przypadku mogą zajść jeszcze dwie możliwości: odcinek jednostkowy mieści się całkowitą liczbę razy w odcinku mierzonym lub też odcinek jednostkowy, choć jest współmierny z odcinkiem mierzonym, to jednak nie mieści się w nim całkowitą liczbę razy.



Rys. 7

Przypuśćmy, że mamy do czynienia z pierwszą możliwością i że odcinek jednostkowy, np. 1 cm, mieści się w odcinku mierzonym dokładnie p razy, gdzie p jest liczbą całkowitą (na rys. 7 liczba $p = 5$).

Wówczas powiemy, że długość mierzonego odcinka AB wynosi p jednostek. Liczbę p nazywamy **liczbą wymiarową długości** lub krótko: **miarą danego odcinka.**

Jeśli odcinek jednostkowy jest współmierny z odcinkiem mierzonym, lecz nie mieści się w nim całkowitą liczbę razy, wówczas — jak to wiemy z lekcji poprzedniej — istnieje taka wspólna miara d, która mieści się całkowitą liczbę razy (np. l razy) w odcinku jednostkowym i całkowitą liczbę razy (np. k razy) w odcinku mierzonym. Wówczas będzie:

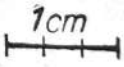
odcinek mierzony $CD = k \cdot d$,

odcinek jednostkowy $1 = l \cdot d$,

z czego wynika, że $d = \frac{1}{l}$,

zatem $CD = k \cdot \frac{1}{l}$,

czyli $CD = \frac{k}{l}$



Rys. 8

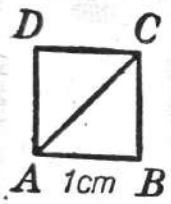
Odcinek mierzony CD stanowi więc $\frac{k}{l}$ odcinka jednostkowego, to zaś oznacza, że miarą odcinka mierzonego jest w tym przypadku ułamek $\frac{k}{l}$ (na rys. 8 mamy $CD = \frac{7}{3}$ cm).

Z powyższych przykładów widzimy, że **miarą odcinka współmiernego z jednostką długości jest liczba całkowita lub ułamek.**

Zupełnie oczywista jest też prawdziwość twierdzenia odwrotnego:

Jeśli miarą odcinka przy pewnej jednostce długości jest liczba całkowita lub ułamek, to odcinek ten jest współmierny z jednostką długości (np. jeśli $CD = \frac{7}{3}$ cm, to wspólną miarą odcinka CD i odcinka równego 1 cm jest $\frac{1}{3}$ cm).

Z tych dwóch twierdzeń wynikają bardzo ważne konsekwencje. Przejdźmy mianowicie teraz do sprawy mierzenia odcinka, który jest niewspółmierny z jednostką długości (na rys. 9 bok kwadratu ma długość 1 cm, odcinkiem mierzonym jest przekątna kwadratu AC).



Rys. 9

Jaką liczbą wyrazi się miara długości takiego odcinka? Nie może to być liczba całkowita ani ułamek, gdyż wtedy — jak wykazaliśmy przed chwilą — odcinek mierzony musiałby być współmierny z jednostką długości, a to nie zachodzi. Więc jaką liczbą jest np. miara przekątnej AC kwadratu z rys. 9? Odpowiedź na to pytanie brzmi: **miara odcinka niewspółmiernego z jednostką długości jest liczbą niewymierną.**

Z liczbami niewymiernymi spotkaliście się już na lekcjach algebry. Teraz widzicie, jak bardzo potrzebne są te nowe liczby. Dopiero po wprowadzeniu liczb niewymiernych możemy podawać dokładne miary również takich odcinków, które nie są współmierne z jednostką długości. W swoim czasie (w lekcji 72) wykażemy np., że miarą długości przekątnej kwadratu o boku jednostkowym jest liczba niewymierna oznaczona symbolem $\sqrt{2}$.

Dokładniejsze omówienie liczb niewymiernych nastąpi w lekcji następnej. Teraz przypominamy jeszcze pewne nazwy poznane w algebrze. Liczby całkowite i ułamkowe określamy wspólnym mianem **liczb wymiernych.** Liczby wymierne i niewymierne, dodatnie i ujemne, noszą wspólną nazwę **liczb rzeczywistych.**

Pytania

1. Co to znaczy zmierzyć jakiś odcinek?
2. Jaki odcinek przyjęto za jednostkę długości? Jakie znacie części i wielokrotności tej jednostki?
3. Jaką liczbą wyraża się miara odcinka współmiernego z odcinkiem jednostkowym?
4. Jaką liczbą wyraża się miara odcinka niewspółmiernego z odcinkiem jednostkowym?
5. Jakie liczby nazywamy rzeczywistymi?

LEKCJA 18

O liczbach rzeczywistych

Poprzednia lekcja ma ogromne znaczenie z punktu widzenia teoretycznego. Pokazaliśmy w niej, że odkrycie odcinków niewspółmiernych pociągnęło za sobą konieczność wprowadzenia nowych liczb. Do zbioru liczb całkowitych i ułamkowych doszły liczby niewymierne nie dające się dokładnie przedstawić w postaci ułamka. Dzisiejsza lekcja rzuci nieco światła na te nowe liczby.

Przykład 1. Niech będzie dany odcinek a długości $\frac{7}{3}$ dcm. Odcinek ten jest współmierny z odcinkiem jednostkowym, tzn. z decymetrem, przy czym wspólna miara wynosi $\frac{1}{3}$ dcm.

Spróbujmy — jak to się najczęściej w praktyce czyni — wyrazić długość rozważanego odcinka w ułamku dziesiętnym. W tym celu dzielimy 7 przez 3. W wyniku dzielenia otrzymujemy ułamek dziesiętny nieskończony

$$\frac{7}{3} = 2{,}33333\ldots \qquad \text{(Sprawdźcie!)}$$

Przeanalizujmy dokładnie, co ten wynik oznacza.

Przypuśćmy, że długość odcinka a nie jest nam znana i że chcemy ją znaleźć za pomocą taśmy mierniczej, na której zaznaczone są decymetry, centymetry i milimetry. Przykładamy bardzo

dokładnie taśmę do mierzonego odcinka i stwierdzamy, że odkładają się na nim 2 decymetry, 3 centymetry, 3 milimetry i zostaje reszta mniejsza od 1 mm.

Możemy powiedzieć, że długość odcinka wynosi w przybliżeniu 2,33 dm, przy czym błąd jest mniejszy od 0,01 dm, czyli od 1 mm.

Gdybyśmy mieli bardziej precyzyjne narzędzia miernicze pozwalające odkładać dziesiąte, setne i tysięczne części milimetra, w wyniku pomiarów otrzymywalibyśmy kolejno

2,333 dm, 2,3333 dm, 2,33333 dm,

ciągle jednak pozostawałaby pewna reszta.

W praktyce zadowalamy się przybliżonymi wynikami pomiarów, przy czym stopień dokładności pomiaru odpowiada oczywiście celowi, któremu ten pomiar służy. Zdajemy sobie np. dobrze sprawę, że inny musi być stopień dokładności pomiaru długości deski, którą chcemy załatać podłogę, a inny — pomiaru średnicy kółeczka, które ma być wprawione do zegarka.

Uzyskiwanie coraz dalszych cyfr po przecinku na drodze pomiaru jest technicznie rzeczą bardzo trudną; puśćmy jednak wodze fantazji i wyobraźmy sobie, że mamy idealne przyrządy miernicze pozwalające osiągnąć dowolną dokładność pomiaru.

Kontynuując pomiar naszego odcinka, otrzymywaliśmy ułamki dziesiętne z coraz to większą ilością trójek po przecinku, lecz ciągle pozostawałaby pewna reszta.

Mówimy, że dokładna miara odcinka a wyraża się ułamkiem zwykłym $\frac{7}{3}$ lub ułamkiem dziesiętnym nieskończonym 2,33333...

W ułamku dziesiętnym nieskończonym 2,33333... powtarza się ustawicznie trójka. Powiadamy, że jest to ułamek dziesiętny okresowy, przy czym okres składa się z jednej cyfry 3. Ogólnie okresem ułamka dziesiętnego nazywamy powtarzającą się cyfrę lub grupę cyfr.

Arytmetyka uczy, że każdy ułamek zwykły równa się pewnemu ułamkowi dziesiętnemu skończonemu lub nieskończonemu okresowemu, który otrzymujemy w wyniku dzielenia licznika przez mianownik. Sprawdźcie, że jest np.:

$$\frac{3}{4} = 0{,}75,\quad \frac{7}{20} = 0{,}35,\quad \frac{11}{40} = 0{,}275,\quad \frac{17}{32} = 0{,}53125,$$

$\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots$ (ułamek nieskończony okresowy, okres jednocyfrowy)

$\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots$ (okres dwucyfrowy, powtarza się grupa cyfr 27)

$\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots$ (okres jednocyfrowy rozpoczynający się od drugiej cyfry po przecinku)

$\frac{57}{110} = 0{,}5181818\ldots$

Zauważmy, że również liczbę całkowitą lub ułamek dziesiętny skończony możemy uważać za równy ułamkowi dziesiętnemu nieskończonemu o okresie 0. Np.:

$$6 = 6{,}00000\ldots,\quad 0{,}35 = 0{,}35000\ldots$$

Uwzględniając tę uwagę, możemy powiedzieć, że:

Każda liczba całkowita i każdy ułamek zwykły równa się pewnemu ułamkowi dziesiętnemu nieskończonemu okresowemu.

Ale i odwrotnie: **każdy ułamek dziesiętny nieskończony okresowy może być przedstawiony w postaci ułamka zwykłego lub liczby całkowitej** (jak to się robi, dowiecie się w klasie X).

Zważywszy, że liczby całkowite i ułamkowe noszą wspólną nazwę liczb wymiernych, możemy powyższe twierdzenia ująć w formie następującej:

1. Każda liczba wymierna równa się pewnemu ułamkowi dziesiętnemu nieskończonemu okresowemu.

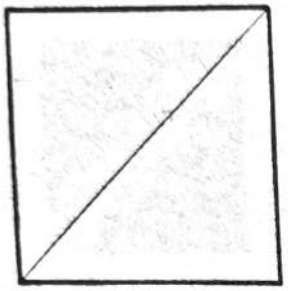
2. Każdy ułamek dziesiętny nieskończony okresowy równa się pewnej liczbie wymiernej.

Tak więc:

ułamki dziesiętne nieskończone okresowe są symbolami liczb wymiernych (przedstawiają sobą liczby wymierne).

Przykład 2.

Niech będzie dany kwadrat, którego bok ma długość 1 dcm. Sposobem wskazanym w przykładzie 1 przeprowadźmy pomiar przekątnej kwadratu, która, jak wiemy, jest niewspółmierna z bokiem kwadratu.



Rys. 10

Okazuje się, że pomiar długości przekątnej kwadratu o boku równym jednostce prowadzi do ułamka dziesiętnego nieskończonego nieokresowego. Jego cyfry początkowe są następujące:

$$1{,}4142135623730 95\ldots$$

Tak samo **pomiar każdego odcinka niewspółmiernego z jednostką długości daje ułamek dziesiętny nieskończony nieokresowy.**

Zestawmy teraz dwie rzeczy:

W poprzedniej lekcji powiedzieliśmy, że miarą odcinka niewspółmiernego z jednostką długości jest liczba niewymierna,

przed chwilą zaś stwierdziliśmy, że miarą odcinka niewspółmiernego z jednostką długości jest ułamek dziesiętny nieskończony nieokresowy.

Oznacza to, że między pojęciem liczby niewymiernej a pojęciem ułamka nieskończonego nieokresowego chcemy postawić znak równości.

I rzeczywiście: **mówiąc o liczbie niewymiernej mamy na myśli ułamek dziesiętny nieskończony nieokresowy.**

Na lekcjach algebry poznaliście już niektóre liczby niewymierne. Wiadomo np., że $\sqrt{17}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{2}$ są liczbami niewymiernymi. Każdy z tych symboli może być, jak wiecie, zastąpiony ułamkiem dziesiętnym nieskończonym nieokresowym.

$\sqrt{17} = 4{,}12310\ldots$, $\sqrt[3]{6} = 1{,}81712\ldots$, $\sqrt[4]{2} = 1{,}189207\ldots$

przy czym w każdym z tych ułamków umielibyśmy napisać dowolną ilość cyfr po przecinku.

Trzeba jednak wiedzieć, że pierwiastki nie wyczerpują wszystkich liczb niewymiernych. Istnieje nieskończenie wiele liczb nie-

wymiernych nie będących pierwiastkami. Każdy ułamek dziesiętny nieskończony nieokresowy jest pewną liczbą niewymierną.

Rzecz prosta, żeby mieć do czynienia z określoną liczbą niewymierną, a więc z określonym ułamkiem nieskończonym nieokresowym, trzeba znać sposób, za pomocą którego można napisać dowolną ilość jego cyfr dziesiętnych.

Niżej podajemy przykłady ułamków nieskończonych:

$$0{,}122111222211111\ldots$$

(jedynka, dwie dwójki, trzy jedynki itd.)

$$0{,}121121112\ldots$$

(jedynka, dwójka, dwie jedynki, dwójka itd.).

$$0{,}353355333555\ldots$$

(trójka, piątka, dwie trójki, dwie piątki itd.)

Wszystkie te ułamki nieskończone uważamy za znane liczby niewymierne (dlaczego?).

Ujmując krótko dotychczasowe rozważania powiemy:

1. Podobnie jak ułamki dziesiętne nieskończone okresowe są liczbami wymiernymi, tak ułamki dziesiętne nieskończone nieokresowe są liczbami niewymiernymi.

2. Liczby wymierne i liczby niewymierne tworzą zbiór liczb rzeczywistych.

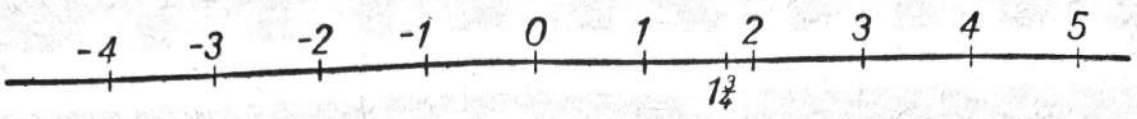
3. Miarą każdego odcinka przy obranej jednostce długości jest pewna liczba rzeczywista (wymierna lub niewymierna).

Dodajmy jeszcze, że przyjmuje się za prawdziwe również twierdzenie odwrotne względem zdania 3:

Każda dodatnia liczba rzeczywista (wymierna czy niewymierna) jest przy danej jednostce miarą pewnego odcinka.

Zdanie to jest pewnikiem, tzn. twierdzeniem, którego prawdziwość uznajemy bez dowodu.

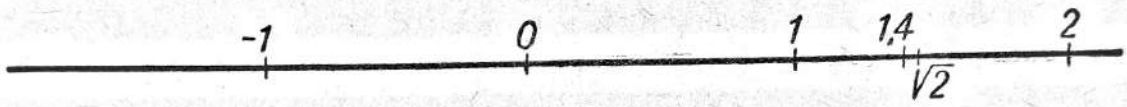
W klasach niższych mieliście nieraz do czynienia z osią liczbową, na której „przedstawialiście" liczby wymierne dodatnie, ujemne i zero (rys. 11). Poznany przed chwilą pewnik poucza nas, że rów-



Rys. 11

nież każdej liczbie niewymiernej dodatniej czy ujemnej odpowiada na osi liczbowej określony punkt.

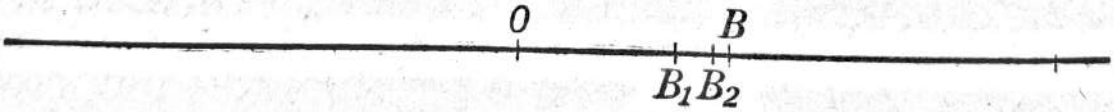
Na rys. 12 zaznaczono punkt odpowiadający liczbie $\sqrt{2}$, czyli ułamkowi nieskończonemu 1,41421...



Rys. 12

Gdybyśmy zamiast tego ułamka nieskończonego przyjmowali kolejne przybliżenia: 1,4; 1,41; 1,414;... i zaznaczali na osi punkty odpowiadające tym przybliżeniom, to punkty te leżałyby coraz bliżej punktu odpowiadającego liczbie $\sqrt{2}$. Odległość pierwszego z tych punktów od punktu $\sqrt{2}$ byłaby mniejsza od 0,1 jednostki, odległość drugiego byłaby mniejsza od 0,01 jednostki, odległość trzeciego mniejsza od 0,001 jednostki itd.

Podobnie istnieje na osi punkt B odpowiadający liczbie niewymiernej 0,353355333555... (patrzcie rys. 13)*)



Rys. 13

Na zakończenie zauważmy ciekawą rzecz. Z tego, co powiedzieliśmy wyżej, wynika, że gdyby w jakiś sposób udało nam się zaznaczyć na osi liczbowej wszystkie liczby wymierne (wszystkie ca-

*) Punkty B_1, B_2, ... odpowiadają przybliżeniom: 0,3; 0,35; itd.

łości i wszystkie ułamki), to na osi pozostałoby jeszcze nieskończenie wiele punktów „nieobsadzonych". Ale gdyby nam się udało zaznaczyć jeszcze na osi wszystkie liczby niewymierne, wówczas nie pozostałby „nieobsadzony" żaden punkt!

Każdej liczbie wymiernej czy niewymiernej, tzn. każdej liczbie rzeczywistej odpowiada na osi liczbowej określony punkt. I odwrotnie: każdemu punktowi na osi liczbowej odpowiada pewna liczba rzeczywista.

Liczby rzeczywiste można porównywać, można też na nich wykonywać różne działania tak jak na liczbach wymiernych. Omawianie tych spraw przekraczałoby jednakże ramy naszego podręcznika. Ograniczymy się tylko do stwierdzenia, że: Dwie liczby niewymierne są równe, jeżeli ich wszystkie przybliżenia dziesiętne są równe.

Pytania

1. Jakie liczby nazywamy wymiernymi?
2. W postaci jakiego ułamka dziesiętnego nieskończonego możemy przedstawić każdą liczbę wymierną?
3. Jak określiliśmy liczby niewymierne?
4. Obmyślcie własne przykłady (określonych) ułamków nieskończonych nieokresowych.
5. Jakich nowych rzeczy dowiedzieliście się z tej lekcji o osi liczbowej?

LEKCJA 19

Stosunek odcinków. Proporcje odcinkowe. Proporcjonalność odcinków

Stosunkiem jednej liczby do drugiej nazywamy w arytmetyce iloraz pierwszej liczby przez drugą. Np. stosunkiem liczby 6 do liczby 8 jest ułamek $\frac{6}{8}$, czyli $\frac{3}{4}$. W geometrii rozważamy również stosunki odcinków.

OKREŚLENIE. **Stosunkiem jednego odcinka do drugiego nazywamy liczbę, którą otrzymujemy, jeśli te odcinki zmierzymy po kolei**

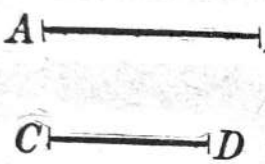
tą samą jednostką długości i pierwszą z otrzymanych liczb podzielimy przez drugą.

Krócej można by to określenie wypowiedzieć tak: **Stosunkiem dwóch odcinków nazywamy iloraz miar tych odcinków zmierzonych za pomocą tej samej jednostki miary.**

Stosunek odcinka AB do odcinka CD oznaczamy jednym z dwóch symbolów

$$\frac{AB}{CD} \text{ lub } AB : CD$$

Na rys. 14 mamy dwa odcinki AB i CD. Po zmierzeniu okazało się, że długość AB wynosi 2 cm, a długość CD wynosi 1,5 cm. Wobec tego $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{1{,}5} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$



Rys. 14

Zauważcie, że liczba wyrażająca stosunek dwóch odcinków nie ma żadnego miana!

Odcinki AB i CD były mierzone w centymetrach. Gdybyśmy za jednostkę długości przyjęli milimetr, wówczas oczywiście miara każdego odcinka zmieniłaby się, ale stosunek $\frac{AB}{CD}$ pozostałby bez zmiany. Istotnie długości odcinków AB i CD wynosiłyby wówczas odpowiednio 20 mm i 15 mm, ale stosunek $\frac{AB}{CD}$ byłby równy $\frac{20}{15}$, czyli „po staremu" $\frac{4}{3}$.

Widzimy, że zmiana jednostki długości nie wpłynęła na wartość stosunku $\frac{AB}{CD}$. Można udowodnić, że zachodzi twierdzenie:

Stosunek odcinków nie zależy od wyboru jednostki długości.

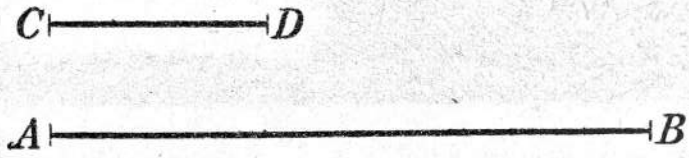
Ścisły dowód tego twierdzenia byłby zbyt trudny, dlatego ograniczymy się do następującego, raczej poglądowego, wyjaśnienia:

Jeśli zamiast pewnej jednostki długości weźmiemy inną, np. k razy mniejszą, to w każdym odcinku ta nowa jednostka „zmieści się k-krotnie większą liczbę razy", aniżeli przedtem. W ułamku wyrażającym stosunek odcinków zarówno licznik, jak mianownik zwiększą się k razy, ale zmiana ta nie spowoduje zmiany samego ułamka;

Twierdzenie, o którym mowa, jest bardzo ważne, gdyż przy wyznaczaniu stosunku jednego odcinka do drugiego pozwala mierzyć te odcinki taką jednostką, jaka jest dla nas najdogodniejsza.

W szczególności możemy przyjąć za jednostkę drugi odcinek i za pomocą tej jednostki zmierzyć pierwszy. Przypuśćmy np., że $CD = 1$, $AB = 2\frac{3}{4}\,CD$ (rys. 15). Wówczas

$$\frac{AB}{CD} = \frac{2\frac{3}{4}}{1} = 2\frac{3}{4}$$



Rys. 15

Ale $2\frac{3}{4}$ jest przecież miarą odcinka AB mierzonego jednostką CD.

Przeto:

Stosunek odcinka AB do odcinka CD jest równy mierze odcinka AB, gdy CD przyjmujemy za jednostkę.

Innymi słowy: Aby znaleźć stosunek odcinka AB do odcinka CD, wystarczy zmierzyć odcinek AB, przyjmując odcinek CD za jednostkę.

Spostrzeżenie to ma duże znaczenie teoretyczne*).

Gdy odcinki AB i CD są współmierne, wówczas w wielu wypadkach dogodnie jest obrać za jednostkę ich wspólną miarę. Wtedy stosunek odcinków równa się stosunkowi liczb, które podają, ile razy wspólna miara mieści się w każdym z nich.

Np. jeśli $AB = 4d$, $CD = 5d$, to $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{5}$.

---

*) Wykorzystamy je w lekcji 23 przy dowodzie twierdzenia Talesa.

Odwrotnie, jeśli wiemy, że $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{5}$, to odcinki AB i CD możemy przedstawić w postaci $AB = 4d$ i $CD = 5d$, gdzie d oznacza wspólną miarę tych odcinków.

Uwaga. Stosunek odcinków może być niekiedy wyrażony liczbą niewymierną. Np. jeśli $AB = \sqrt{6}$ cm, $CD = \sqrt{2}$ cm, to $\frac{AB}{CD} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$.

Proporcje odcinkowe

W dalszych rozważaniach będziemy dla uproszczenia oznaczali odcinki i ich miary tymi samymi symbolami. Np. mówiąc o odcinku a, będziemy mieli na myśli odcinek, którego długość wynosi a jednostek. Zakładamy też, że wszystkie odcinki, o których będzie mowa niżej, zostały zmierzone tą samą jednostką.

OKREŚLENIE. **Mówimy, że odcinki a, b, c, d tworzą proporcję, jeżeli stosunek odcinka a do odcinka b jest równy stosunkowi odcinka c do odcinka d.**

Proporcję piszemy tak:

(I) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

lub tak

(I′) $$a : b = c : d$$

i czytamy: odcinek a ma się tak do odcinka b, jak odcinek c ma się do odcinka d.

Mówiąc: odcinek a, odcinek b itd. mamy na myśli miary tych odcinków.

Przypominamy z kursu algebry, że:

1. W proporcji (I) liczby a, b, c, d nazywamy wyrazami, przy czym liczby a i d nazywamy wyrazami skrajnymi, a liczby b i c wyrazami środkowymi.

2. Prawdziwość proporcji możemy poznać po tym, że iloczyn wyrazów skrajnych proporcji równa się iloczynowi jej wyrazów środkowych.

Proporcjonalność odcinków

Weźmy pod uwagę odcinki:

$$a, b, c, d$$
$$k, l, m, n$$

OKREŚLENIE. Mówimy, że odcinki a, b, c, d są proporcjonalne do odcinków k, l, m, n, jeżeli stosunek odcinka a do odcinka k jest równy stosunkowi odcinka b do odcinka l, a także równy stosunkowi odcinka c do odcinka m itd., to znaczy, jeśli

$$\frac{a}{k} = \frac{b}{l} = \frac{c}{m} = \frac{d}{n}$$

Na przykład odcinki

5 cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm

są proporcjonalne do odcinków

1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm

gdyż

$$\frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4} = 5$$

Zadania liczbowe

Przykład 1. Stosunek odcinka a do odcinka b wynosi 3,6, odcinek a ma długość 5,4 cm. Obliczyć długość odcinka b.

Rozwiązanie

Dane: $\frac{a}{b} = 3{,}6$; $a = 5{,}4$ cm. Obliczyć b.

Podstawiając do pierwszej równości $a = 5{,}4$, otrzymujemy $\frac{5{,}4}{b} = 3{,}6$. Mnożąc obie strony ostatniej równości przez b, mamy

$$5{,}4 = 3{,}6b, \text{ skąd } b = \frac{5{,}4}{3{,}6} = 1{,}5 \text{ cm}.$$

Sprawdzenie: $\frac{5,4}{1,5} = 3,6$

Odpowiedź. Odcinek b ma długość 1,5 cm.

Przykład 2. Obliczyć długości odcinków a i b wiedząc, że odcinek a jest dłuższy od odcinka b o 18 cm i że $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$.

Rozwiązanie. Jeśli $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$, to odcinki a i b mają wspólną miarę x, przy czym jest $a = 7x$, $b = 3x$.

Odcinek a jest dłuższy od odcinka b o 18 cm, więc mamy równość

$$7x - 3x = 18$$

Stąd $4x = 18$, $x = 4,5$ cm,

$a = 7x = 7 \cdot 4,5$ cm $= 31,5$ cm, $b = 3x = 3 \cdot 4,5$ cm $= 13,5$ cm

Sprawdzenie: $a - b = 31,5$ cm $- 13,5$ cm $= 18$ cm

$$\frac{a}{b} = \frac{31,5}{13,5} = \frac{315}{135} = \frac{7}{3}$$

Odpowiedź. $a = 31,5$ cm, $b = 13,5$ cm.

Przykład 3. Odcinki 7 cm, x, y są proporcjonalne do odcinków 8 cm, 10 cm, 12 cm. Obliczyć odcinki x i y*).

Rozwiązanie. Mamy tu zależność

$$\frac{7}{8} = \frac{x}{10} = \frac{y}{12}$$

z której wynikają dwie proporcje

$$\frac{7}{8} = \frac{x}{10} \text{ i } \frac{7}{8} = \frac{y}{12}$$

Rozwiązując te proporcje, otrzymujemy kolejno

$$8x = 70 \qquad 8y = 84$$

$$x = \frac{70}{8} \qquad y = \frac{84}{8}$$

$$x = 8,75 \text{ cm i } y = 10,5 \text{ cm}$$

---

*) Obliczyć odcinki x i y, to znaczy obliczyć długości tych odcinków.

Odpowiedź. $x = 8{,}75$ cm, $y = 10{,}5$ cm

Sprawdzenie wykonajcie sami.

Pytania

1. Podajcie określenie stosunku dwóch odcinków.
2. Jakie twierdzenie o stosunku dwóch odcinków poznaliście w tej lekcji?
3. Jakie konsekwencje wypływają z tego twierdzenia?
4. Co nazywamy proporcją? Jaką własność ma proporcja?
5. Wyjaśnijcie, co oznacza zdanie: „Boki trójkąta ABC są proporcjonalne do boków trójkąta $A'B'C'$".

Zadania

1. Zamienić na ułamki dziesiętne (skończone lub okresowe) następujące liczby

$$\frac{7}{16}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{13}{22}$$

2. Która z liczb jest większa: $\frac{355}{113}$ czy 3,1415926?

3. Znaleźć stosunek odcinków:

a) 0,16 dm i $\frac{4}{9}$ cm b) 51 mm i 0,034 m

4. Stosunek $\frac{a}{b} = 0{,}7$, $b = 25$ cm. Obliczyć a.

5. Stosunek $\frac{a}{b} = 1{,}3$, $a = 16{,}9$ cm. Obliczyć b.

6. Odcinek $a = 37{,}5$ cm podzielono na dwie części x i y w ten sposób, że $x : y = 7 : 8$. Obliczyć x i y.

7. Obliczyć x z proporcji $\frac{2{,}1}{x} = \frac{2{,}8}{0{,}05}$.

8. Odcinki x, y, z, u są proporcjonalne do odcinków 9 cm, 12 cm, 16 cm, 20 cm. Obliczyć x, y, z wiedząc, że $u = 15$ cm.

9. Odcinki a, b, c są proporcjonalne do odcinków 3 cm, 5 cm, 7 cm. Suma odcinków a, b, c wynosi 90 cm. Obliczyć a, b, c.

Odpowiedzi

1. 0,4375; 0,41666...; 0,5909090... **2.** $\frac{355}{113}$. **3.** a) $\frac{18}{5}$, b) $\frac{3}{2}$, **4.** 17,5 cm. **5.** 13 cm. **6.** $x = 17{,}5$; $y = 20$. **7.** 0,0375. **8.** $6\frac{3}{4}$, 9, 12. **9.** 18, 30, 42. Wskazówka. Oznaczyć: $a = 3x$, $b = 5x$, $c = 7x$.

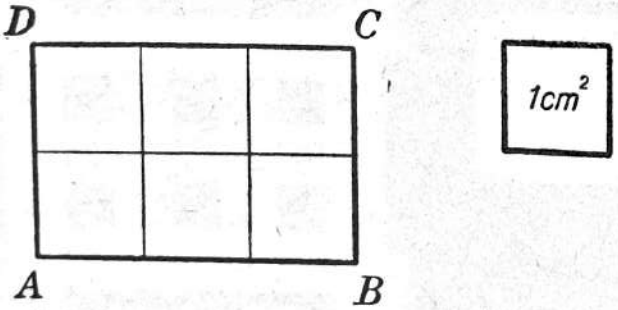
LEKCJA 20

Pole figury płaskiej. Pole prostokąta i kwadratu

W tej i dwóch następnych lekcjach będzie mowa o mierzeniu figur płaskich. Nie jest to zagadnienie dla Was obce. Zajmowaliście się nim w szkole podstawowej, a i w życiu z pewnością wypadło Wam nieraz mierzyć pole powierzchni arkusza tektury czy blachy, kawałków płótna czy sukna, podłogi, ścian, działki gruntu itp.

Teraz wiadomości na ten temat odświeżymy i pogłębimy.

Przede wszystkim robimy zastrzeżenie, że będziemy rozpatrywali jedynie figury płaskie ograniczone, tzn. dające się zamknąć w pewnym kole, jak np. odcinek, wielokąt, pierścień kołowy itp. (Figurami ograniczonymi nie są np. półprosta, kąt, półpłaszczyzna).



Rys. 16

Mierząc jakąś figurę płaską ograniczoną, porównujemy jej wielkość z wielkością kwadratu jednostkowego, tzn. kwadratu, którego bok jest równy jednostce długości. Na rys. 16 np. mamy prostokąt, na którym można odłożyć dokładnie 6 centymetrów kwadratowych. Mówimy, że pole tego prostokąta wynosi 6 cm².

Zauważmy: prostokątowi $ABCD$, a więc figurze geometrycznej, została w wyniku pomiaru przyporządkowana pewne liczba, zwana polem prostokąta.

W podobny sposób może być przyporządkowana liczba innym prostokątom i innym figurom płaskim ograniczonym.

PEWNIKI

1. Przy ustalonej jednostce długości każdej ograniczonej figurze płaskiej odpowiada pewna liczba rzeczywista dodatnia lub równa zeru, którą nazywamy polem figury.

Prawdziwość tego zdania jest dla nas zupełnie oczywista, ale udowodnić go nie możemy, dlatego nazywamy je pewnikiem. Przyjmujemy też dalej bez dowodu, że:

2. punkty, odcinki i w ogóle ograniczone linie mają pola równe zeru;

3. kwadrat o boku równym jednostce długości ma pole równe 1;

4. figury przystające mają równe pola;

5. jeśli figurę podzielimy kilkoma liniami na części, to pole całej figury jest sumą pól tych części.

Np. pole prostokąta $ABCD$ z rys. 16 jest sumą pól kwadratów, na jakie prostokąt ten został podzielony.

Na powyższych pewnikach będziemy opierali się w dalszych rozważaniach.

Uwaga. Pewnik 3 mówi nam, że jednostki pola nie ustalamy dowolnie, lecz wiążemy ją z jednostką długości. Ustalając jednostkę długości, np. metr, ustalamy jednocześnie jednostkę pola, metr kwadratowy, przy czym przez metr kwadratowy rozumiemy kwadrat o boku 1 m.

Przypominamy poniżej najczęściej używane jednostki pola:

$1\ m^2 = 100\ dm^2$, $1\ dm^2 = 100\ cm^2$, $1\ cm^2 = 100\ mm^2$.

1 ar (1 a) $= 100\ m^2$, 1 hektar (1 ha) $= 100$ a $= 10000\ m^2$.

$1\ km^2 = 100$ ha $= 1000000\ m^2$

Musicie dobrze przyswoić sobie jednostki pola i zależności między nimi. W szczególności pamiętajcie, że:

$1\ m = 10\ dm$, ale $1\ m^2 = 100\ dm^2$,

$1\ m = 100\ cm$, ale $1\ m^2 = 10000\ cm^2$ itd.

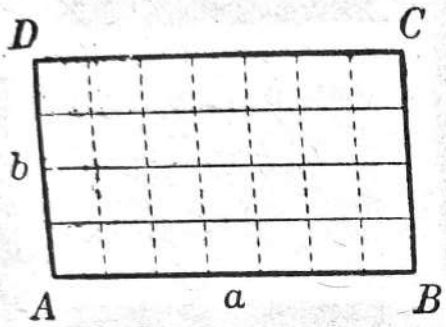
Pole prostokąta

Niech będzie dany prostokąt, którego kolejne boki — przy ustalonej jednostce miary — mają odpowiednio długości a i b. Oznaczmy pole prostokąta przez S.

TWIERDZENIE. **Pole prostokąta jest równe iloczynowi długości dwóch jego kolejnych boków.**

$$S = a \cdot b$$

Dowód. I. Prawdziwość tego twierdzenia jest zupełnie oczywista w przypadku, gdy a i b są liczbami całkowitymi (rys. 17).



Rys. 17

Prostokąt $ABCD$ możemy wówczas podzielić na b pasów o szerokości równej jednostce. Pole każdego pasa wynosi oczywiście a jednostek kwadratowych, wobec tego pole prostokąta $ABCD$, jako b razy większe od pola pojedynczego pasa, jest równe $b \cdot a$ jednostek kwadratowych. Zatem w tym przypadku $S = a \cdot b$.

II. Nieco trudniejszy jest dowód w przypadku, gdy a i b oznaczają ułamki.

Przypuśćmy, że po sprowadzeniu tych ułamków do wspólnego mianownika jest

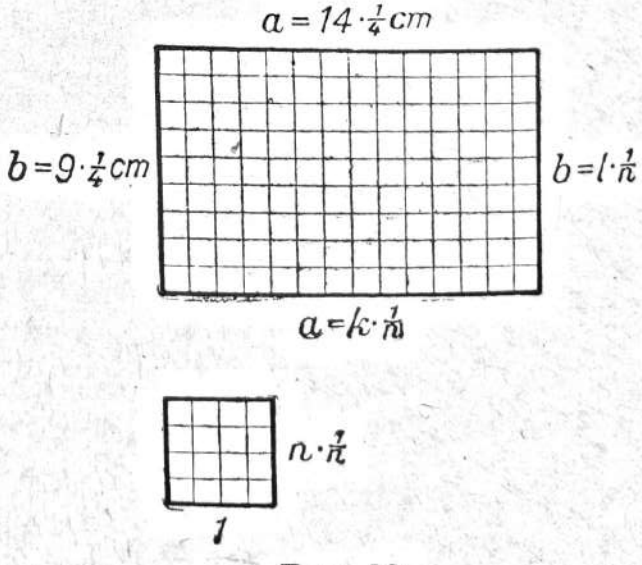
$$a = \frac{k}{n} \text{ i } b = \frac{l}{n}$$

gdzie k, l, n oznaczają liczby całkowite dodatnie. (Na rys. 18 $a = \frac{14}{4}$ cm, $b = \frac{9}{4}$ cm).

Pisząc ostatnie równości w postaci

$$a = k \cdot \frac{1}{n} \text{ i } b = l \cdot \frac{1}{n}$$

z łatwością dostrzegamy, że $\frac{1}{n}$ jednostki długości (na rys. 18 $\frac{1}{4}$ cm) jest wspólną miarą bo-



Rys. 18

ków prostokąta, przy czym ta wspólna miara mieści się k razy w boku a i l razy w boku b.

Pokryjmy teraz zarówno prostokąt jak kwadrat jednostkowy (rys. 18) sieciami kwadracików o bokach równych $\frac{1}{n}$ jednostki długości.

Liczba kwadracików w kwadracie jednostkowym wynosi n^2 (na rys. 18 wynosi 16), z czego wnosimy, że pole jednego kwadracika jest równe $\frac{1}{n^2}$ jednostki pola.

Liczba kwadracików w prostokącie wynosi $k \cdot l$ (na rys. 18 liczba ta wynosi $14 \cdot 9$, czyli 126).

Jeśli pole jednego kwadracika jest równe $\frac{1}{n^2}$, to pole prostokąta złożonego z $k \cdot l$ takich kwadracików wynosi

$$S = (k \cdot l) \cdot \frac{1}{n^2}$$

Przekształcając to wyrażenie, otrzymujemy kolejno

$$S = \frac{k \cdot l}{n^2}$$

$$S = \frac{k}{n} \cdot \frac{l}{n}$$

Ale $\frac{k}{n} = a$, $\frac{l}{n} = b$, przeto

$$S = a \cdot b$$

Wykazaliśmy więc, że nasze twierdzenie jest prawdziwe, gdy długości boków a i b są wyrażone liczbami wymiernymi (całkowitymi lub ułamkami).

III. Można wykazać, że twierdzenie pozostaje prawdziwe również wtedy, gdy a i b są liczbami niewymiernymi, czyli ułamkami dziesiętnymi nieskończonymi nieokresowymi. Musimy jednak zrezygnować z tej części dowodu, gdyż musielibyśmy operować pojęciem iloczynu ułamków nieskończonych, a pojęcia tego nie znamy.

Uwaga. Zauważcie, że tak prosty na pozór wzór na pole prostokąta wcale niełatwo w ogólności uzasadnić!

Pole kwadratu

Kwadrat jest prostokątem o równych bokach, przeto wzór na pole kwadratu otrzymujemy ze wzoru na pole prostokąta, przyjmując, że $b = a$.

$$S = a \cdot a$$

$$\boxed{S = a^2}$$

Uwaga. Wzór ten wyjaśnia nam, dlaczego metr kwadratowy (kwadrat o boku 1 m, czyli 10 dm) jest równy 100 dm^2, dlaczego 1 $dm^2 = 100\ cm^2$ itd.

Pytania

1. Zacytujcie pewnik 1.
2. Jakie znacie jednostki pola? Jakie są zależności między tymi jednostkami?
3. Powtórzcie dowód twierdzenia o polu prostokąta i zastanówcie się, z jakich pewników korzystamy przy tym dowodzie.

Zadania

1. Obliczyć w metrach kwadratowych pole prostokąta o bokach 27 cm i 13,4 dm.

2. Działka gruntu o polu 1 ha ma kształt kwadratu. Obliczyć długość boku tego kwadratu.

3. Obliczyć, w metrach bok kwadratu, którego pole równa się polu prostokąta o bokach 1,8 m i 32 dm.

***4.** Obliczyć w decymetrach boki prostokąta wiedząc, że stosunek tych boków wynosi 1 : 4, a pole prostokąta jest równe 2,25 m^2.

5. Szosę długości 8 km i szerokości 24 m projektuje się wyłożyć kostką. Obliczyć liczbę potrzebnych kostek wiedząc, że pole kostki wynosi 6 dm^2.

6. Trzy tysiące ha ziemi rozparcelowano na działki prostokątne o wymiarach 200 m i 300 m. Ile powstało działek?

7. Ogródek jest prostokątem o bokach 40 m i 25 m. Ścieżka przy płocie dokoła ogródka ma szerokość 80 cm. Obliczyć w procentach stosunek pola części ogródka zajętej przez ścieżkę do pola całego ogródka.

Odpowiedzi

1. 0,3618 m². **2.** 100 m. **3.** 2,4 m. **4.** 7,5 dm, 30 dm. **5.** 3200000. **6.** 500. **7.** 10,144%.

LEKCJA 21

Pole równoległoboku. Pole trójkąta

Omówione w poprzedniej lekcji twierdzenie o polu prostokąta jest twierdzeniem o podstawowym znaczeniu. Na nim będą oparte dowody wszystkich twierdzeń, które poznamy w tej i następnej lekcji.

Pole równoległoboku

Niech będzie dany równoległobok $ABCD$ (rys. 19), w którym bok $AB = a$, wysokość $DE = h$. Pole równoległoboku oznaczamy przez S.

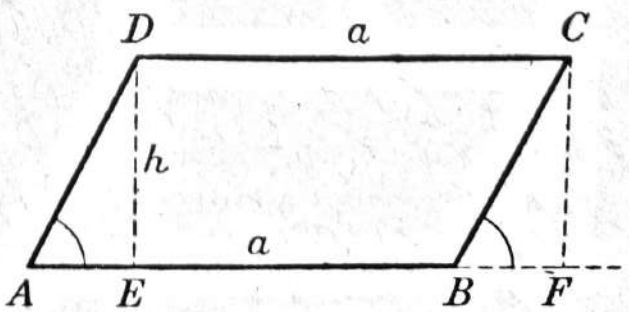
TWIERDZENIE. **Pole równoległoboku jest równe iloczynowi boku przez odpowiednią wysokość.**

$$\boxed{S = a \cdot h}$$

Dowód. Przedłużmy bok AB, narysujmy wysokość CF i rozpatrzmy trójkąty prostokątne ADE i BCF. W tych trójkątach $AD = BC$ (przeciwległe boki równoległoboku)

$\sphericalangle DAE = \sphericalangle CBF$ (kąty odpowiadające przy prostych równoległych AD i BC przeciętych sieczną AF).

Zatem trójkąty ADE i BCF są przystające na pod-



Rys. 19

stawie II cechy przystawania trójkątów prostokątnych: „*Jeżeli przeciwprostokątna i kąt ostry jednego trójkąta są odpowiednio równe przeciwprostokątnej i kątowi ostremu drugiego trójkąta, to te trójkąty są przystające*".

Porównajmy teraz pole równoległoboku $ABCD$ z polem prostokąta $EFCD$, którego bok EF jest równy bokowi a równoległoboku, a bok DE jest równy wysokości h równoległoboku. Widzimy, że:

Pole równoległoboku = pole trapezu $EBCD$ + pole trójkąta AED

Pole prostokąta = pole trapezu $EBCD$ + pole trójkąta BFC*)

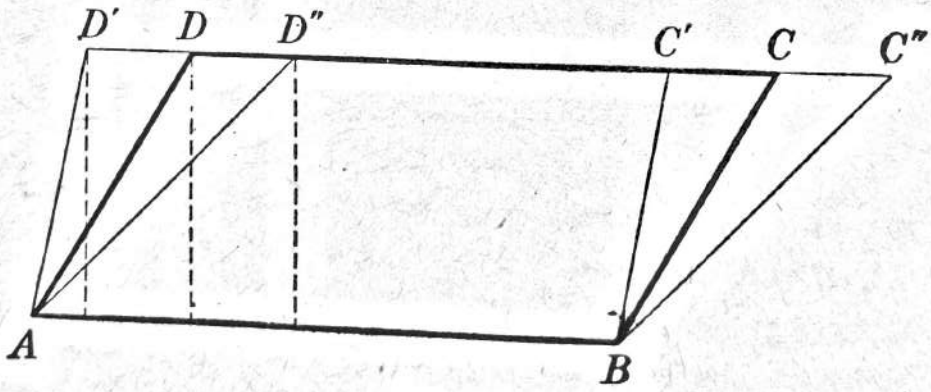
Ale pola trójkątów AED i BFC, jako pola figur przystających, są równe**), przeto pole równoległoboku $ABCD$ równa się polu prostokąta $EFCD$ (gdyż sumy odpowiednio równych liczb są równe).

Pole tego prostokąta — na mocy twierdzenia z lekcji poprzedniej — jest równe iloczynowi boku EF przez bok DE, czyli iloczynowi ah. Zatem również pole równoległoboku

$$S = ah$$

co było do okazania.

Uwaga 1. Zauważcie, że pole równoległoboku zależy tylko od wielkości boku i odpowiedniej wysokości, a nie zależy od kształtu równoległoboku, tzn. od tego, jakie kąty ma równoległobok. Np. na rys. 20 równoległoboki $ABCD$, $ABC'D'$ i $ABC''D''$ mają równe pola.



Rys. 20

Uwaga 2. Gdy zamiast boku a weźmiemy pod uwagę bok b (rys. 21), wówczas odpowiednią wysokością jest odcinek $AF = h_1$.

---

*) Stosujemy tu pewnik 5 z poprzedniej lekcji (str. 105).

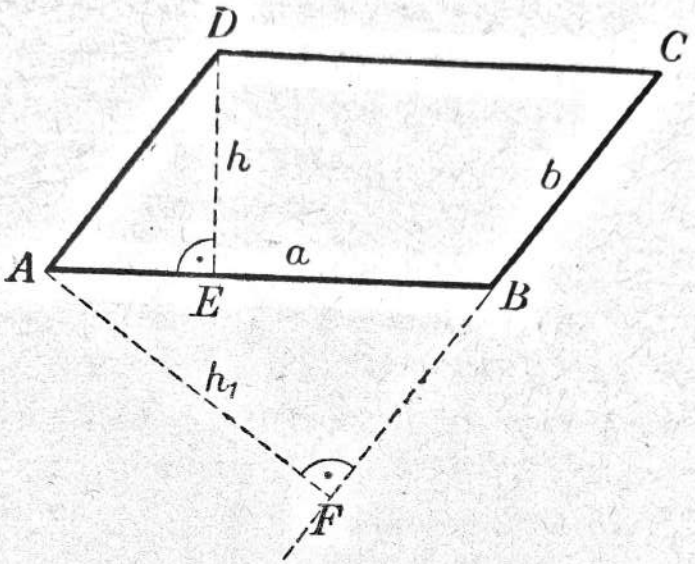
**) Por. pewnik 4

Pole równoległoboku możemy więc obliczyć dwoma sposobami:

$$S = a \cdot h$$

lub

$$S = b \cdot h_1$$



Rys. 21

Pole trójkąta

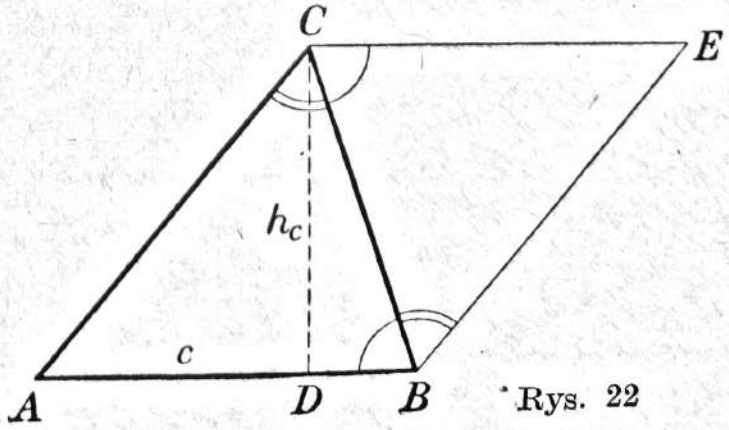
Niech będzie dany trójkąt ABC, w którym bok $AB = c$, wysokość $CD = h_c$. Pole trójkąta oznaczmy przez S (rys. 22).

TWIERDZENIE. **Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu boku przez odpowiednią wysokość.**

$$\boxed{S = \frac{1}{2} c \cdot h_c}$$

Dowód. Narysujmy przez punkt B prostą równoległą do boku AC, a przez punkt C prostą równoległą do boku AB. Powstanie wówczas równoległobok $ABEC$, którego pole — na mocy poprzedniego twierdzenia — jest równe iloczynowi boku AB przez wysokość CD, czyli

(I) pole równoległoboku $ABEC = c \cdot h_c$.



Rys. 22

Rozpatrzmy teraz dwa trójkąty: $\triangle ABC$ i $\triangle CBE$. W tych trójkątach:

bok BC jest wspólny

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCE$ (kąty naprzemianległe wewnętrzne przy prostych równoległych AB i CE przeciętych sieczną BC)
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle CBE$ (kąty naprzemianległe wewnętrzne przy prostych równoległych AC i BE przeciętych sieczną BC).

Zatem trójkąty te są przystające na podstawie III cechy przystawania trójkątów (zacytujcie tę cechę!).

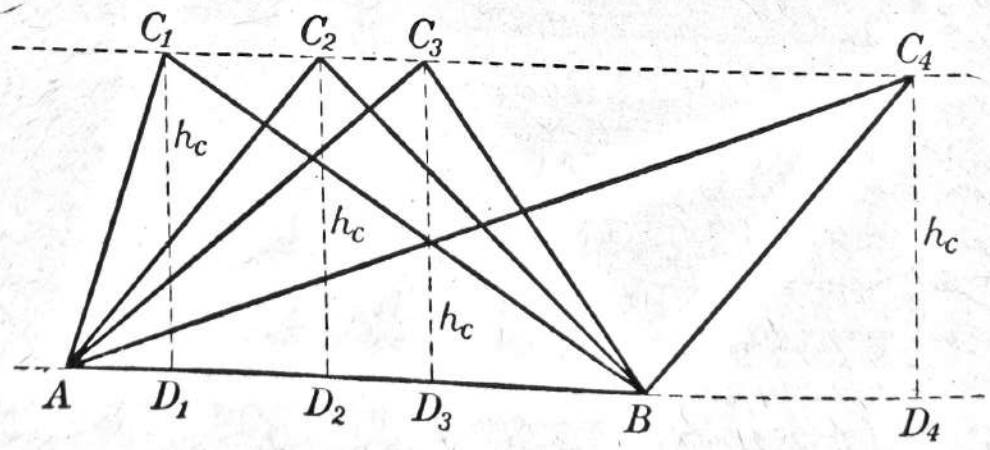
Pole równoległoboku $ABEC$ jest równe sumie pól trójkątów ABC i CBE (pewnik 5), ponieważ zaś pola tych trójkątów są równe (pewnik 4), przeto możemy powiedzieć, że pole równoległoboku równa się podwojonemu polu trójkąta ABC.

Odwrotnie: pole trójkąta ABC jest równe połowie pola równoległoboku $ABEC$. Wobec równości (I) jest więc

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

c. b. d. o.*)

Uwaga 1. Pole trójkąta zależy tylko od długości boku i odpowiedniej wysokości, a nie zależy od kształtu trójkąta. Np. na rys. 23 trójkąty ABC_1, ABC_2, ABC_3, ABC_4 mają pola równe.



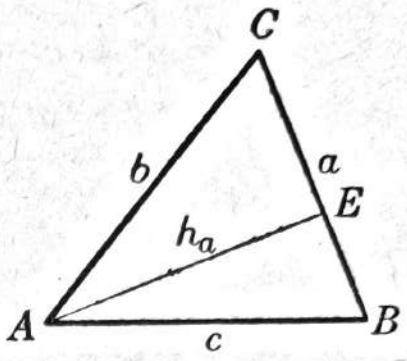
Rys. 23

*) Skrót c. b. d. o. oznacza: „co było do okazania"

Uwaga 2. Jeżeli w $\triangle ABC$ zamiast boku $AB = c$ weźmiemy pod uwagę bok $BC = a$, wówczas odpowiednią wysokością jest $AE = h_a$ (rys. 24).

Mamy wówczas

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$



Rys. 24

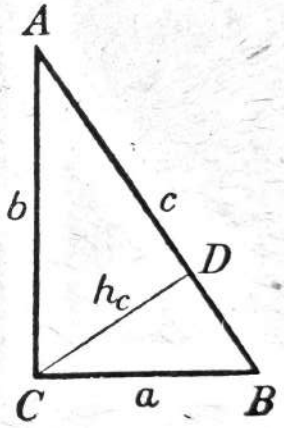
Uwaga 3. Gdy trójkąt ABC jest prostokątny, przy czym przyprostokątnymi są boki $BC = a$ i $AC = b$ (rys. 25), wówczas pole trójkąta

$$S = \frac{1}{2} ab$$

gdyż przyprostokątna jest zarazem wysokością trójkąta.

Naturalnie, jest również

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$



Rys. 25

Pytania

1. Wypowiedzcie i udowodnijcie twierdzenie o polu równoległoboku. Przy sposobności przypomnijcie sobie cechy przystawania trójkątów prostokątnych.
2. Wypowiedzcie i udowodnijcie twierdzenie o polu trójkąta. Przypomnijcie sobie cechy przystawania trójkątów.
3. Omówcie sposoby obliczania pola trójkąta prostokątnego.
4. Ułóżcie twierdzenie odwrotne względem twierdzenia: „Jeśli dwie figury są przystające, to mają równe pola". Czy to twierdzenie odwrotne jest prawdziwe? Odpowiedź uzasadnijcie.

Zadania liczbowe

1. W równoległoboku $ABCD$ bok $AB = 8$ cm, bok $BC = 6$ cm, wysokość opuszczona na bok AB jest równa 3 cm. Obliczyć wysokość opuszczoną na bok BC*).

2. Bok trójkąta ma 18 cm. Pole trójkąta wynosi 72 cm^2. Obliczyć wysokość opuszczoną na ten bok.

3. Bok trójkąta ma 16 cm, wysokość opuszczona na ten bok ma 6 cm. Inny bok trójkąta ma 12 cm. Obliczyć wysokość opuszczoną na ten bok.

4. Boki trójkąta prostokątnego wynoszą: 9 cm, 12 cm, 15 cm. Obliczyć wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną.

***5.** Pole równoległoboku jest równe 36 cm^2, a obwód wynosi 34 cm. Odległość między dwoma równoległymi bokami wynosi 4 cm. Obliczyć odległość między dwoma pozostałymi bokami równoległymi oraz boki równoległoboku.

Zadania konstrukcyjne

1. Mając dany równoległobok $ABCD$, zbudować równoległobok $ABC'D'$ o tym samym polu, o tej samej podstawie AB i o danym kącie α przy podstawie.

2. Mając dany trójkąt ABC, zbudować trójkąt ABC' o tym samym polu, tej samej podstawie i o danym boku $BC' = a$.

***3.** Mając dany trójkąt ABC, zbudować trójkąt równoramienny o tym samym polu i o tej samej podstawie.

***4.** Dany trójkąt ABC podzielić za pomocą prostych poprowadzonych przez wierzchołek C na trzy trójkąty o równych polach.

Odpowiedzi

1. 4 cm. Wskazówka. Obliczyć pole równoległoboku. **2.** 8 cm. **3.** 8 cm. **4.** 7,2 cm. **5.** 4,5 cm; 8 cm i 9 cm. Wskazówka. Obliczyć najpierw jeden z boków równoległoboku.

---

*) Przypominamy, że w zeszycie przedmiotowym tekst zadania notujemy w skrócie. Rysujemy np. równoległobok $ABCD$ wraz z wysokościami DE i DF i piszemy:

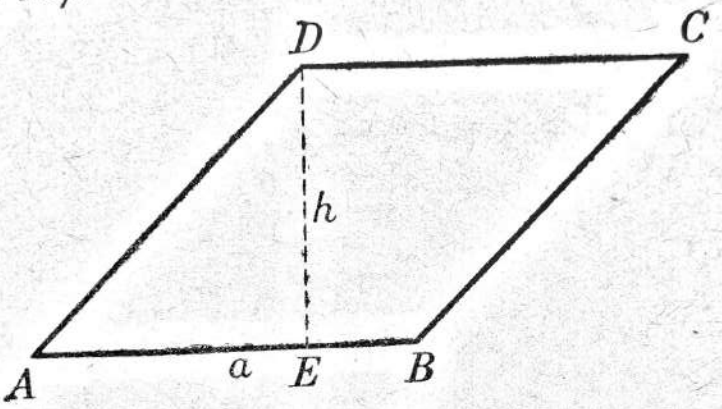
$AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $DE = 3$ cm, $DF = ?$

LEKCJA 22

Pole rombu, trapezu, wielokąta

Pole rombu

Romb jest tylko szczególnym przypadkiem równoległoboku, wobec tego twierdzenie o polu równoległoboku odnosi się również do rombu (rys. 26).



Rys. 26

Pole rombu równa się iloczynowi boku przez wysokość rombu.

$$\boxed{S = a \cdot h}$$

Poznamy jeszcze sposób obliczania pola rombu, gdy dane są obie jego przekątne.

Niech będzie dany romb $ABCD$ o przekątnych $AC = d$ i $BD = d'$ (rys. 27).

TWIERDZENIE. **Pole rombu równa się połowie iloczynu jego przekątnych.**

$$\boxed{S = \frac{1}{2} dd'}$$

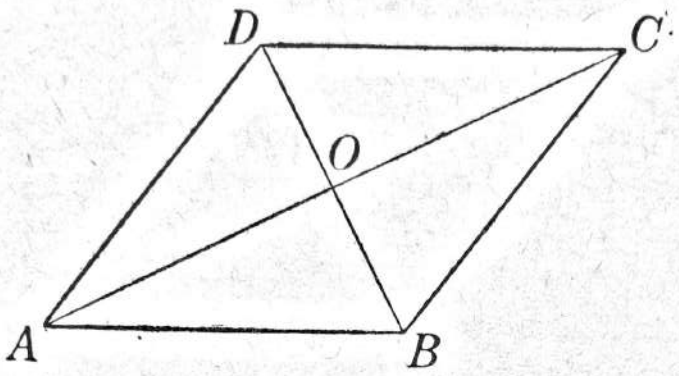
Dowód. Z kursu geometrii klasy VIII wiemy, że przekątne rombu dzielą się na połowy i są prostopadłe, przeto

$$DO = \frac{1}{2} d' \quad \text{i} \quad DO \perp AC$$

Odcinek DO jest więc wysokością trójkąta ACD.

Obliczając pole trójkąta ACD, mamy

$$\text{Pole } \triangle ACD = \frac{1}{2} AC \cdot DO = \frac{1}{2} d \cdot \frac{1}{2} d' = \frac{1}{4} dd'$$



Rys, 27

Pole S rombu $ABCD$ jest dwa razy większe od pola trójkąta ACD (dlaczego?), przeto

$$S = 2 \cdot \frac{1}{4} dd' = \frac{1}{2} dd' \qquad \text{c. b. d. o.}$$

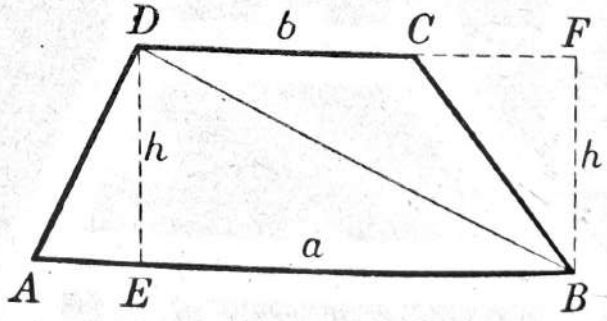
Pole trapezu

Niech będzie dany trapez $ABCD$, w którym $AB = a$ i $CD = b$ są podstawami, $DE = h$ jest wysokością (rys. 28).

Oznaczamy pole trapezu przez S.

TWIERDZENIE. **Pole trapezu jest równe iloczynowi połowy sumy podstaw przez wysokość trapezu.**

$$\boxed{S = \frac{a+b}{2} \cdot h}$$



Rys. 28

Dowód. Podzielmy trapez $ABCD$ za pomocą przekątnej BD na dwa trójkąty: $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$. Oznaczmy pola tych trójkątów odpowiednio przez S_1 i S_2, wówczas mamy zależność

(1) $$S = S_1 + S_2$$

Pole S_1 trójkąta ABD jest równe połowie iloczynu boku $AB = a$ i wysokości $DE = h$

$$S_1 = \frac{1}{2}ah \tag{2}$$

W trójkącie rozwartokątnym BCD znany jest bok $CD = b$, temu zaś bokowi odpowiada wysokość FB.

Ale $FB = DE = h$, wobec tego pole S_2 trójkąta BCD jest równe połowie iloczynu $b \cdot h$

$$S_2 = \frac{1}{2}bh \tag{3}$$

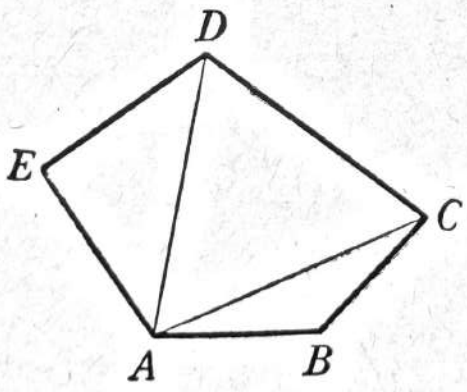
Uwzględniając zależności (1), (2) i (3), mamy

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}h(a+b) =$$

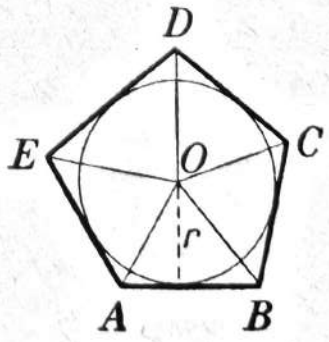
$$= \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{a+b}{2} \cdot h \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Pole wielokąta

Obliczanie pola dowolnego wielokąta staramy się sprowadzić do obliczania pól figur omówionych w tej i poprzedniej lekcji. Np. pole pięciokąta z rys. 29 można obliczyć, dzieląc ten pięciokąt na trójkąty za pomocą przekątnych (lub inaczej) i sumując pola tych trójkątów.



Rys. 29



Rys. 30

Jeżeli wielokąt jest opisany na okręgu, to dzielimy go na trójkąty, łącząc wierzchołki ze środkiem okręgu (rys. 30). Wysokość

każdego z tych trójkątów jest równa promieniowi r okręgu wpisanego w wielokąt. Wobec tego pole S tego wielokąta:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} CD \cdot r + \frac{1}{2} DE \cdot r + \frac{1}{2} EA \cdot r$$

$$S = \frac{1}{2} r(AB + BC + CD + DE + EA).$$

Suma w nawiasach jest obwodem wielokąta oznaczanym zwykle symbolem $2p$ (p oznacza połowę obwodu), ostatnią równość możemy więc napisać w postaci

$$S = \frac{1}{2} r \cdot 2p$$

i ostatecznie w postaci

$$\boxed{S = p \cdot r}$$

Wzór ten jest skrótem twierdzenia:

TWIERDZENIE. **Pole wielokąta opisanego na okręgu równa się iloczynowi połowy obwodu wielokąta przez promień okręgu.**

Wniosek

Biorąc pod uwagę, że a) w każdy wielokąt foremny daje się wpisać okrąg, b) w każdy trójkąt daje się wpisać okrąg, c) w każdy romb daje się wpisać okrąg, możemy wypowiedzieć twierdzenie:

Pole wielokąta foremnego równa się iloczynowi połowy obwodu wielokąta przez promień okręgu wpisanego w ten wielokąt

oraz analogiczne twierdzenie dla trójkąta i rombu.
Twierdzenia te sformułujcie sami.

Pytania

1. Omówcie dwa sposoby obliczania pola rombu.
2. Wypowiedzcie i udowodnijcie twierdzenie o polu rombu, gdy dane są obie jego przekątne.
   Przy okazji przypomnijcie sobie wszystkie własności przekątnych rombu.

3. Wypowiedzcie i udowodnijcie twierdzenie o polu trapezu.
4. Wypowiedzcie i udowodnijcie twierdzenie o polu wielokąta opisanego na okręgu.

Zadania

1. Obliczyć pole kwadratu, którego przekątna równa się d.

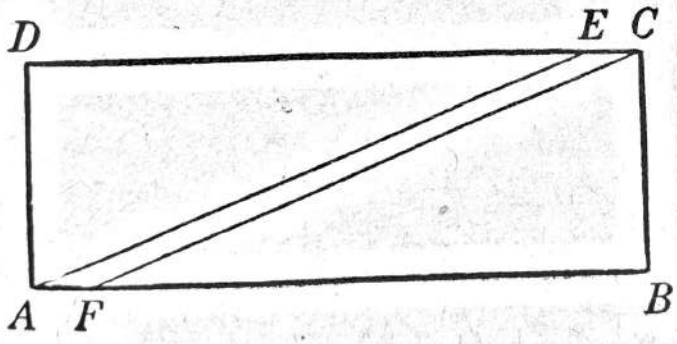
2. Przekątne rombu są w stosunku 2:5. Pole rombu wynosi 16,2 m^2. Obliczyć przekątne rombu.

3. Przekątne rombu wynoszą odpowiednio: 14 cm i 48 cm, bok rombu jest równy 25 cm. Obliczyć wysokość rombu.

* 4. Obliczyć pole rombu wiedząc, że jego bok równa się a, a promień okręgu wpisanego w romb jest równy r.

5. Podstawy trapezu oznaczamy przez a i b, wysokość trapezu — przez h. Wiedząc, że miary odcinków a, b, h są proporcjonalne do liczb 6, 4, 3 oraz że pole trapezu wynosi 60 cm^2, obliczyć podstawy i wysokość trapezu.

* 6. Przez wierzchołki A i C prostokąta $ABCD$ o bokach $AB = 25$ m i $BC = 16$ m poprowadzono proste równoległe AE i FC jak na rys. 31, przy czym $FB = DE = 21$ m. Obliczyć, jaki procent pola prostokąta $ABCD$ stanowi pole równoległoboku $AFEC$.



Rys. 31

* 7. Na rys. 32 mamy fragment mapki sporządzonej w skali 1 : 100 000 przedstawiający obszar zalesiony. Dokonać potrzebnych pomiarów i obliczyć pole powierzchni tego lasu.

Rys. 32

Odpowiedzi

1. $\frac{d^2}{2}$. Wskazówka. Kwadrat możemy uważać za romb o kątach prostych. 2. 3,6 m i 9 m. 3. 13,44 cm. 4. $2ar$. 5. 12 cm, 8 cm, 6 cm. Wskazówka. Oznaczyć: $a = 6x$, $b = 4x$, $h = 3x$. 6. $16^0/_0$. 7. Podzielić obszar na dwa trójkąty, prostokąt i dwa trapezy.

LEKCJA 23

Twierdzenie Talesa

Uwagi wstępne

Treść poprzednich siedmiu lekcyj geometrii stanowi zamkniętą całość. Możemy powiedzieć, że przepracowaliśmy rozdział o mierzeniu odcinków i figur płaskich.

W pierwszym okresie roku szkolnego pozostały do opracowania jeszcze cztery lekcje. Będą one w całości poświęcone **twierdzeniu Talesa,** wnioskom z niego płynącym i jego zastosowaniom w zadaniach.

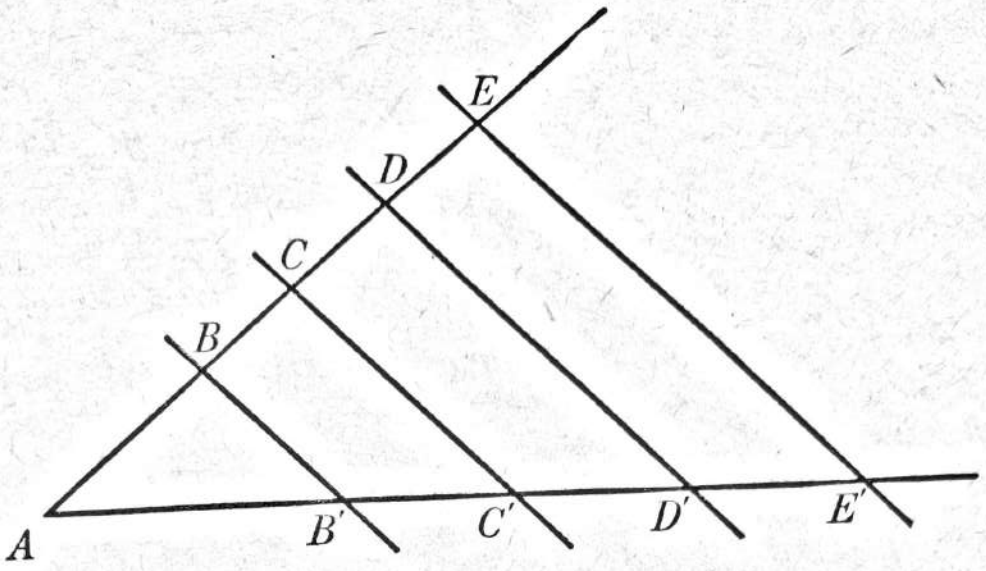
Znaczenie twierdzenia Talesa jest ogromne. Wystarczy powiedzieć, że prawie cały dalszy materiał geometrii klasy IX opiera się na tym twierdzeniu*).

Dowód twierdzenia Talesa opiera się na pewnym twierdzeniu z klasy VIII, które poniżej przypominamy:

Jeżeli na jednym ramieniu kąta odłożymy odcinki równej długości i przez końce tych odcinków poprowadzimy proste równoległe przecinające drugie ramię, to otrzymamy na drugim ramieniu także odcinki równej długości (rys. 33).

---

*) Mimo przyjętej powszechnie nazwy autorstwo tego twierdzenia nie jest pewne. O Talesie wiemy, że pochodził z Miletu i żył w VII—VI wieku przed naszą erą. Jest on więc przedstawicielem wczesnego okresu rozwoju greckiej myśli matematycznej. Tales przebywał podobno jako kupiec w Egipcie i on to — jakoby — pierwszy zapoznał Greków z odkryciami Egipcjan.

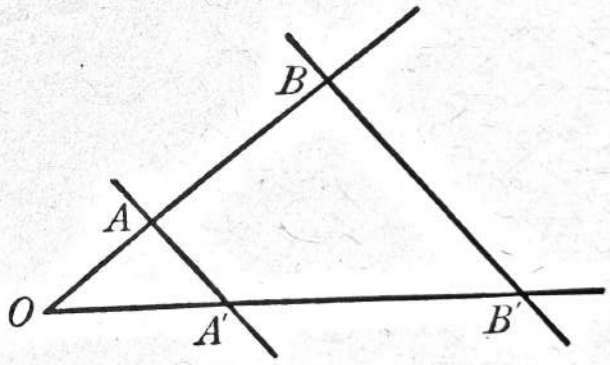


Rys. 33

TWIERDZENIE TALESA. **Jeżeli ramiona kąta są przecięte dwiema równoległymi, to stosunek odcinków** (mierzonych od wierzchołka kąta) **jednego ramienia równa się stosunkowi odpowiednich odcinków drugiego ramienia.**

Założenie: $AA' \parallel BB'$

Teza: $\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$



Rys. 34a

Dowód. Wiedząc, że proste AA' i BB' są równoległe, mamy dowieść, że stosunek odcinka OB do odcinka OA jest równy stosunkowi odcinka OB' do odcinka OA' (rys. 34a).

Przypomnijmy sobie niektóre wiadomości o stosunku odcinków z lekcji 19. Wiemy, że:

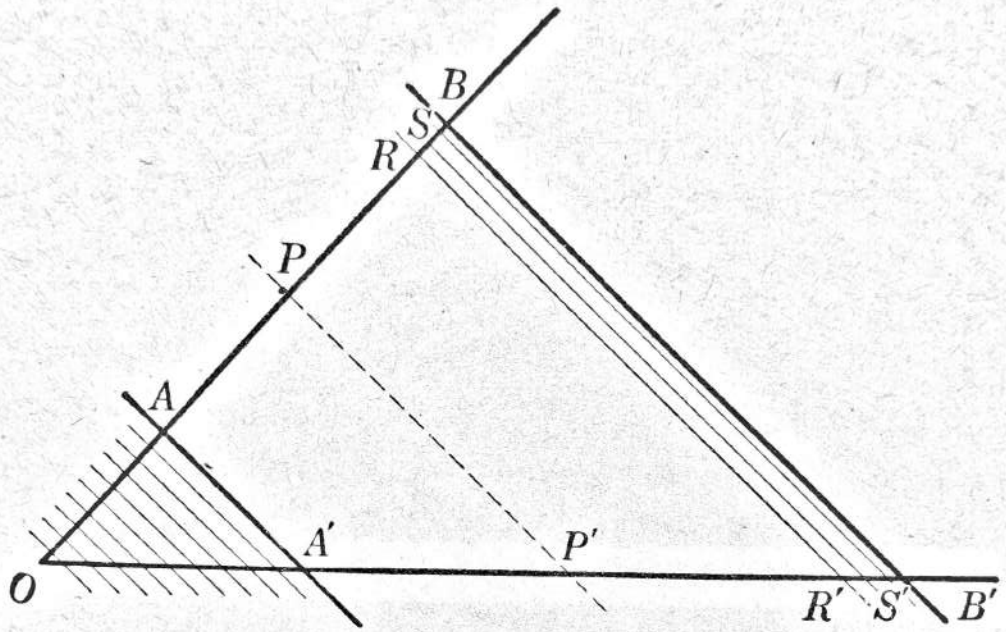
a) stosunek odcinków nie zależy od wyboru jednostki długości (patrz str. 98);

b) aby znaleźć stosunek odcinka OB do odcinka OA, wystarczy zmierzyć odcinek OB, przyjmując odcinek OA za jednostkę długości (patrz str. 99);

c) podobnie: aby znaleźć stosunek odcinka OB' do odcinka OA', wystarczy zmierzyć odcinek OB', przyjmując odcinek OA' za jednostkę.

Jeśli wykażemy więc, że pomiar odcinka OB za pomocą odcinka OA daje ten sam wynik, co pomiar odcinka OB' za pomocą odcinka OA', to twierdzenie Talesa będzie udowodnione.

Odkładamy tedy na odcinku OB odcinek OA. Na rys. 34b odcinek OA odłożył się na odcinku OB trzy razy i pozostała reszta RB.



Rys. 34b

Teraz wypadałoby na odcinku OB' odkładać odcinek OA'. Zamiast tego możemy przez punkty P, R poprowadzić proste równoległe do prostej AA', wiemy bowiem (z cytowanego na wstępie twierdzenia z kl. VIII), że równoległe te wyznaczą na drugim ramieniu odcinki równe odcinkowi OA'.

Jest rzeczą zupełnie oczywistą, że odcinek OA' zmieści się tyleż razy w odcimku OB', ile razy odcinek OA mieści się w odcinku OB i że pozostanie reszta $R'B'$.

Następnie na reszcie RB odkładamy dziesiąte części odcinka OA. Na rys. 34b zmieściło się ich dwie i pozostała nowa reszta SB. Podobnie na reszcie $R'B'$ zmieszczą się dwie dziesiąte części odcinka OA' i pozostanie reszta $S'B'$.

Z kolei okaże się, że setna część odcinka OA zmieści się tyle razy w SB, ile razy setna część odcinka OA' w $S'B'$, itd.

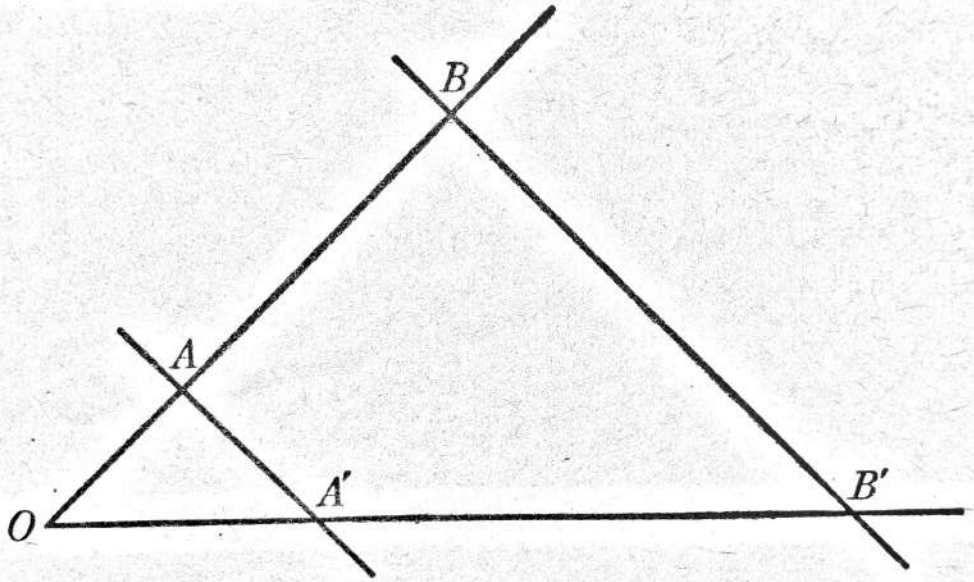
Co to oznacza? Oznacza to, że w wyniku pomiaru odcinka OB za pomocą odcinka OA i odcinka OB' za pomocą odcinka OA' otrzymujemy ułamki dziesiętne (skończone lub nieskończone), w których

wszystkie odpowiednie cyfry są jednakowe*). Ułamki takie są oczywiście równe, zatem:

Stosunek odcinka OB do odcinka OA jest równy stosunkowi odcinka OB' do odcinka OA'

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} \tag{1}$$

Twierdzenie Talesa zostało więc udowodnione. Mówiąc poglądowo, wykazaliśmy, że jeśli $AA' \| BB'$ (rys. 35), to odcinek OB jest tyle razy większy od odcinka OA, ile razy odcinek OB' jest większy od odcinka OA'.



Rys. 35

Wnioski z twierdzenia Talesa

Z twierdzenia Talesa wysnujemy teraz pewne wnioski.

I. Od obu stron proporcji

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$$

odejmujemy 1

$$\frac{OB}{OA} - 1 = \frac{OB'}{OA'} - 1$$

*) W przypadku przedstawionym na rys. 34b każdy z tych ułamków wynosi 3,2...

Wykonujemy zaznaczone odejmowania

$$\frac{OB-OA}{OA}=\frac{OB'-OA'}{OA'}$$

Ale (patrzcie na rys. 35)

$$OB-OA=AB,\quad OB'-OA'=A'B',$$

przeto otrzymujemy proporcję

$$\frac{AB}{OA}=\frac{A'B'}{OA'}$$

którą możemy również napisać w postaci

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OA'}{A'B'} \tag{2}$$

Skonfrontujcie tę proporcję z rysunkiem 35.

II. Do obu stron proporcji (2) dodajemy liczbę 1

$$\frac{OA}{AB}+1=\frac{OA'}{A'B'}+1$$

Wykonujemy zaznaczone dodawania

$$\frac{OA+AB}{AB}=\frac{OA'+A'B'}{A'B'}$$

Ale $OA+AB=OB$, $OA'+A'B'=OB'$ (por. rys. 35), przeto

$$\frac{OB}{AB}=\frac{OB'}{A'B'} \tag{3}$$

I tę proporcję skonfrontujcie z rys. 35.

Pytania

1. Wypowiedzcie i udowodnijcie twierdzenie Talesa.
2. Z jakiego twierdzenia z klasy VIII korzystamy przy dowodzie twierdzenia Talesa?
3. Jakie własności stosunku odcinków wykorzystaliśmy przy dowodzie?

4. W jaki sposób z proporcji (1) wyprowadziliśmy proporcje (2) i (3)?

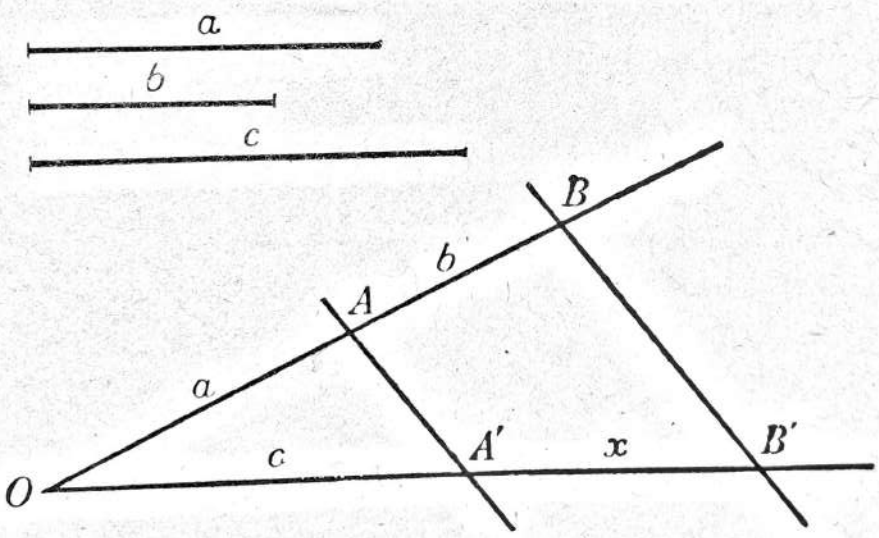
Dla podkreślenia wyjątkowego znaczenia twierdzenia Talesa nie dajemy Wam dzisiaj żadnych zadań. Całą uwagę zwróćcie na jak najlepsze opanowanie dowodu tego twierdzenia i wniosków z niego płynących.

LEKCJA 24

Zastosowanie twierdzenia Talesa do rozwiązywania zadań

Zadanie 1. Dane są trzy odcinki a, b, c. Znaleźć odcinek x, który z danymi odcinkami tworzy proporcję $a:b = c:x$.

Rozwiązanie. Rysujemy dowolny kąt o wierzchołku O. Poczynając od punktu O, odkładamy na jednym ramieniu kąta odcinki $OA = a$ i $AB = b$, a na drugim ramieniu odcinek $OA' = c$ (rys. 36)



Rys. 36

Następnie rysujemy prostą przechodzącą przez punkty A i A', po czym kreślimy prostą przechodzącą przez punkt B i równoległą do prostej AA' (czy pamiętacie, jak się to robi?). Prosta równoległa do AA' przecina drugie ramię kąta w punkcie B'. Odcinek $A'B'$ jest szukanym odcinkiem x, gdyż — zgodnie z proporcją (2) z lekcji poprzedniej zachodzi proporcja $a:b = c:x$.

Uwaga. Odcinek x występujący w proporcji $a:b = c:x$ nazywamy czwartym proporcjonalnym do odcinków a, b i c.

Z konstrukcji, którą przed chwilą wykonaliśmy, widać wyraźnie, że

do trzech danych odcinków istnieje jeden i tylko jeden odcinek czwarty proporcjonalny.

Zadanie 2. Dany jest odcinek m i dwa odcinki a i b. Podzielić odcinek m na części x i y proporcjonalne do odcinków a i b.

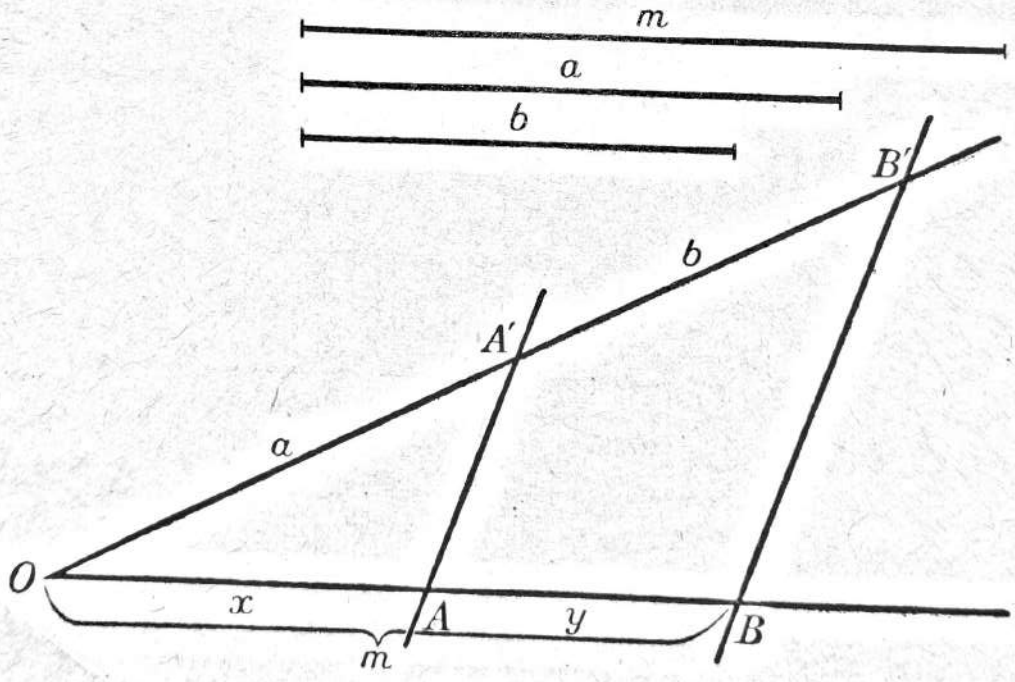
Rozwiązanie. Zgodnie z warunkiem zadania, części x i y powinny spełniać proporcję

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

która jest równoważna proporcji

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

(porównajcie iloczyny wyrazów skrajnych i iloczyny wyrazów środkowych w obu proporcjach!).



Rys. 37

Konstrukcja przebiega w sposób następujący. Kreślimy dowolny kąt O. Poczynając od wierzchołka, odkładamy na jednym ra-

mieniu kąta odcinek $OB = m$, a na drugim ramieniu odcinki $OA' = a$ i $A'B' = b$ (rys. 37).

Prowadzimy prostą BB', następnie przez punkt A' kreślimy prostą równoległą do BB'.

Prosta równoległa przecina odcinek m w punkcie A. Odcinki OA i AB są szukanymi częściami x i y. Konstrukcja oparta jest znowu na proporcji (2) z lekcji poprzedniej.

Zadanie 3. Dwie równoległe przecinają jedno ramię kąta o wierzchołku O w punktach A i B, drugie zaś w punktach A' i B'.

a) Obliczyć OA' wiedząc, że $OB' = 20$ cm, $OB = 25$ cm, $AB = 10$ cm.

b) Obliczyć odcinki OA i OA' wiedząc, że $AB = 18$ cm, $A'B' = 16$ cm, $OA + OA' = 51$ cm.

Rozwiązanie zadania 3a)

Dane: $OB = 25$ cm, $AB = 10$ cm, $OB' = 20$ cm.
Obliczyć: $OA' = x$

Możemy tu skorzystać z proporcji (1) z lekcji poprzedniej

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$$

Podstawiając wielkości dane (przy czym z rys. 38 widać, że $OA = OB - AB = 25$ cm $- 10$ cm $= 15$ cm) oraz niewiadomą x, otrzymujemy proporcję.

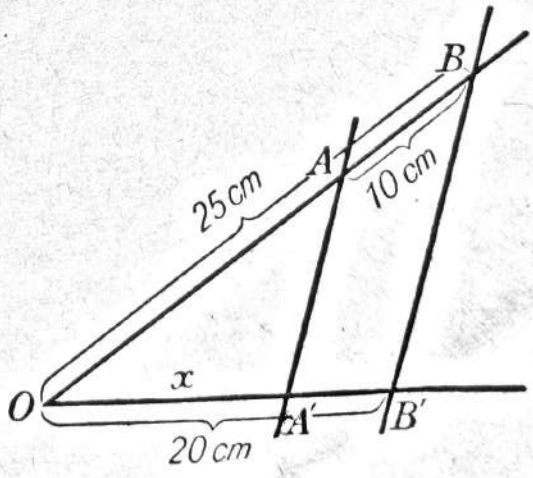
$$\frac{25}{15} = \frac{20}{x}$$

Ułamek po lewej stronie proporcji daje się uprościć, mamy więc

$$\frac{5}{3} = \frac{20}{x}$$

a stąd

$5x = 60, \quad x = 12$ cm



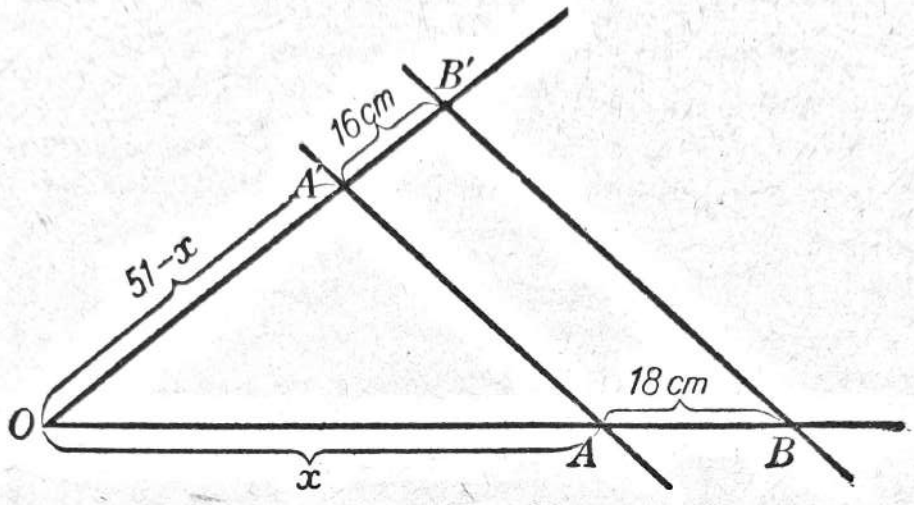
Rys. 38

Odpowiedź. Odcinek OA' ma długość 12 cm.

Rozwiązanie zadania 3b)

Dane: $AB = 18$ cm, $A'B' = 16$ cm, $OA + OA' = 51$ cm.

Obliczyć: OA i OA' (rys. 39).



Rys. 39

Jeśli $OA + OA' = 51$, to możemy oznaczyć:

$$OA = x, \quad OA' = 51 - x$$

Stosując proporcję (2) z lekcji poprzedniej, otrzymujemy kolejno:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$$

$$\frac{x}{18} = \frac{51-x}{16}$$

$16x = 18\,(51-x)$, $16x = 918 - 18x$, $16x + 18x = 918$, $34x = 918$

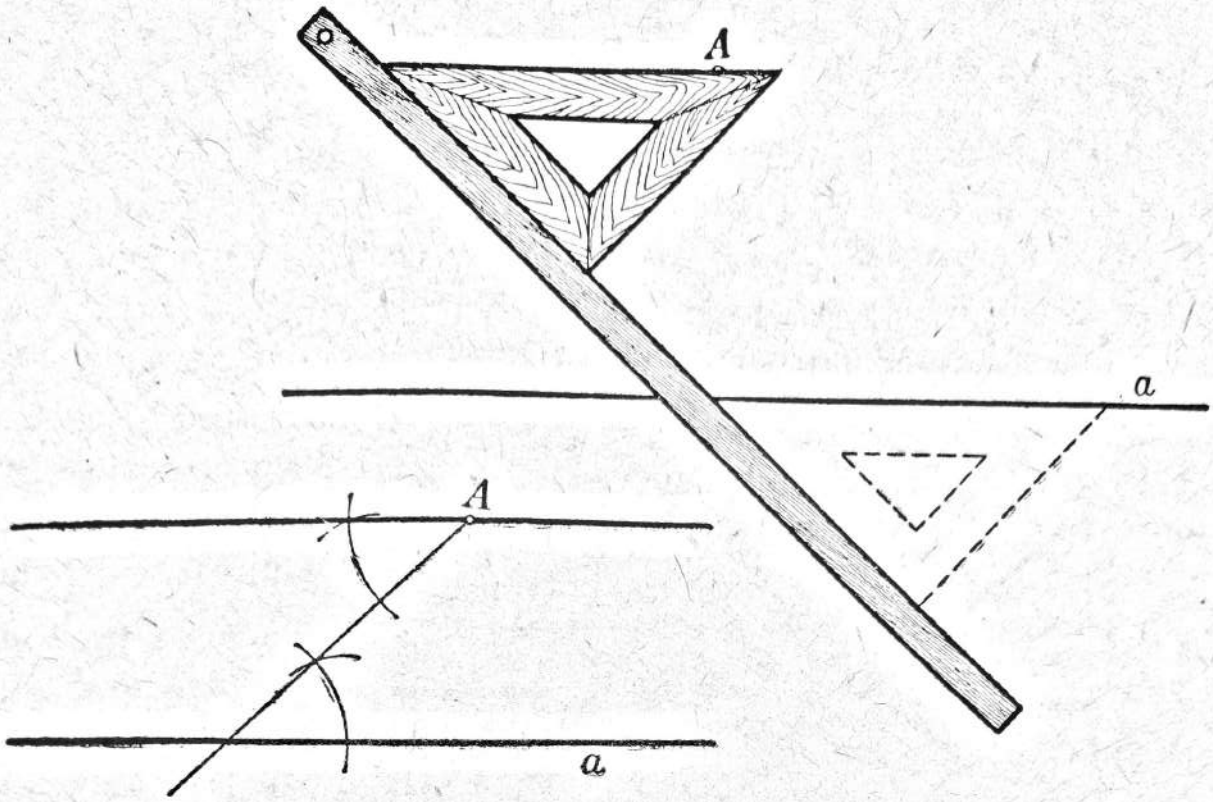
$$x = 27$$

Zatem: $OA = 27$ cm, $OA' = 51 - x = 51 - 27 = 24$ cm

Odpowiedź. $OA = 27$ cm, $OA' = 24$ cm.

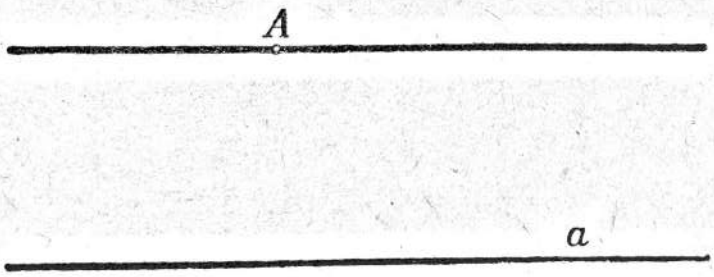
Pytania

Przypomnijcie sobie dobrze konstrukcję prostej równoległej do danej prostej przechodzącej przez dany punkt (rys. 40a i 40b).



Rys. 40a Rys. 40b

Przypomnijcie sobie również pewnik Euklidesa: *„Przez punkt nie leżący na prostej można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do niej“* (rys. 41).



Rys. 41

Zadania

1. Dany odcinek a podzielić konstrukcyjnie w stosunku 3:4.

2. Dwie równoległe przecinają jedno ramię kąta o wierzchołku O w punktach A i B, drugie zaś w punktach A' i B'.

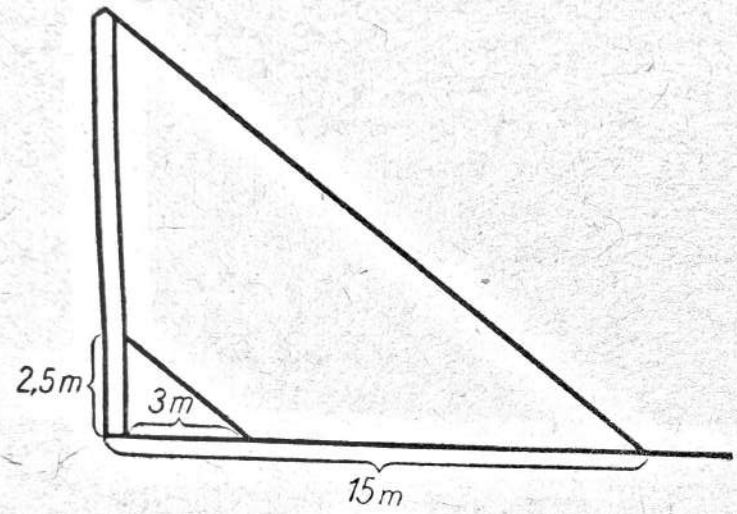
a) Obliczyć OB wiedząc, że $OA = 6$ cm, $OA' = 7$ cm, $OB' = 12$ cm.

b) Obliczyć $A'B'$ wiedząc, że $OA' = 2\frac{1}{2}$ cm, $OA = 4$ cm, $AB = 6$ cm.

c) Obliczyć AB wiedząc, że $OB = 6{,}5$ cm, $OB' = 13$ cm, $A'B' = 4{,}5$ cm.

d) Obliczyć OB wiedząc, że $OA' + OB' = 7{,}5$ cm, $OA = 3{,}2$ cm, $OA' = 3$ cm.

3. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \| CD$, przedłużono boki AD i BC do przecięcia w punkcie O. Obliczyć odcinek OD wiedząc, że jest on krótszy od odcinka OC o 2 cm oraz że $AD = 28$ cm, $BC = 32$ cm.



Rys. 42

*4. Pionowo ustawiony słup rzuca cień długości 15 m. W słup wbity jest duży hak na wysokości 2,5 m nad ziemią. Cień tego haka znajduje się w odległości 3 m od słupa. Obliczyć wysokość słupa (rys. 42).

Odpowiedzi

2. a) $10\frac{2}{7}$ cm, b) 3,75 cm, c) 2,25 cm, d) 4,8 cm, **3.** 14 cm.

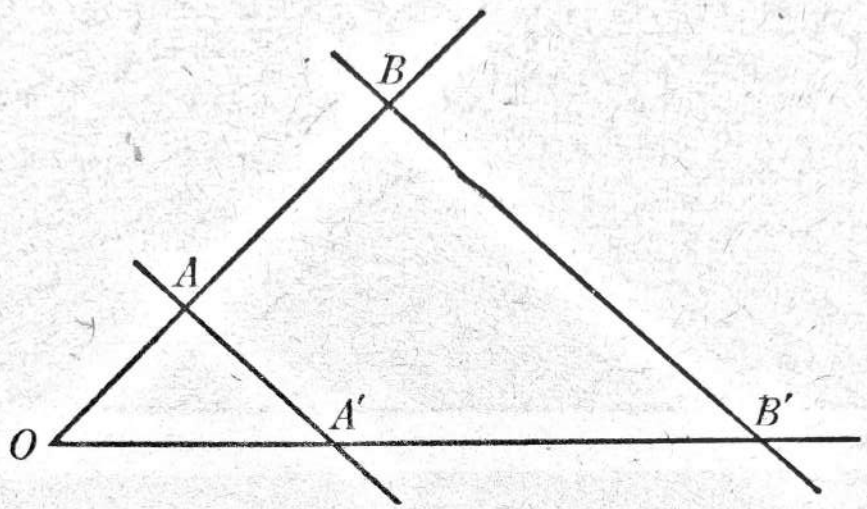
Wskazówka. $OD = x$, $OC = x+2$. **4.** 12,5 m.

LEKCJA 25

Twierdzenie odwrotne względem twierdzenia Talesa

Sformułujemy teraz i udowodnimy twierdzenie odwrotne względem twierdzenia Talesa. W twierdzeniu Talesa zakładaliśmy, że proste AA' i BB' są równoległe (rys. 43a), i w oparciu o to założenie dowodziliśmy, że $OB : OA = OB' : OA'$.

Teraz odwrotnie: założymy, że stosunek odcinka OB do odcinka OA jest równy stosunkowi odcinka OB' do odcinka OA', i wykażemy, że przy tym założeniu proste AA' i BB' są równoległe.



Rys. 43a

TWIERDZENIE ODWROTNE. **Jeżeli stosunek odcinków OA i OB leżących na jednym ramieniu kąta O jest równy stosunkowi odcinków OA' i OB' leżących na drugim ramieniu tego kąta, to proste $A'A$ i $B'B$ są równoległe.**

Założenie:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$$

Teza:

$$AA' \parallel BB'$$

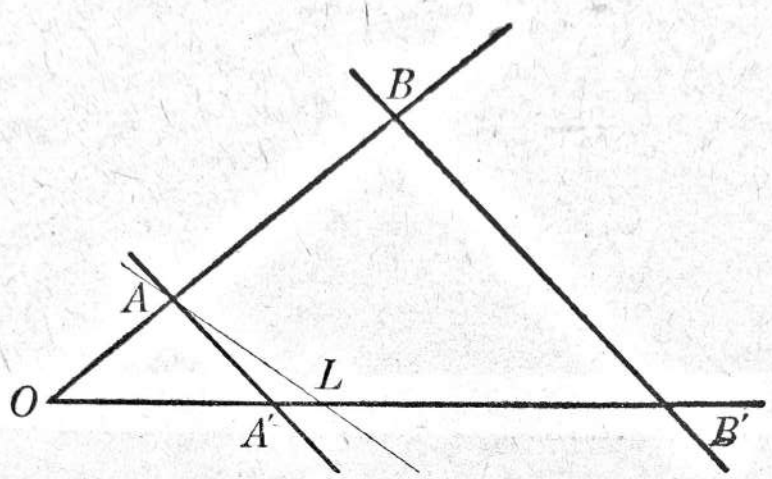
Dowód. Zastosujemy dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności.

Przypuśćmy, że prosta AA' nie jest równoległa do prostej BB' (rys. 43b). Wówczas równoległą do BB' będzie jakaś prosta AL inna niż AA'*).

*) Opieramy się tu na pewniku Euklidesa, zgodnie z którym przez punkt A można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do prostej BB'.

Ale w przypadku równoległości prostych AL i BB' zachodziłaby — na mocy twierdzenia Talesa — proporcja

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OL}$$



Rys. 43 b

Zestawiając tę proporcję z założeniem

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$$

doszlibyśmy do wniosku, że do trzech odcinków OB, OA i OB' istnieją dwa różne odcinki czwarte proporcjonalne: OL i OA'. Jest to oczywiście wniosek niedorzeczny; zatem niesłuszne jest nasze przypuszczenie zrobione na początku dowodu, że proste AA' i BB' nie są równoległe.

Skoro zaś nieprawdziwe jest zdanie: *„proste AA' i BB' nie są równoległe"*, to prawdziwe jest zdanie: *„proste AA' i BB' są równoległe"*, c. b. d. o.

Uwaga. Wykazaliśmy, że jeśli $\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$, to $AA' \parallel BB'$.

Podobnie można by wykazać, że jeśli $\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$, to $AA' \parallel BB'$.

Tak samo, jeśli zachodzi proporcja (3) z lekcji 23, to $AA' \parallel BB'$.

Przykład. Dwie proste przecinają jedno ramię kąta o wierzchołku O w punktach A i B, a drugie ramię w punktach A' i B'.

Sprawdzić, czy te proste są równoległe, jeżeli $OA = 12$ cm, $AB = 18$ cm, $OA' = 8$ cm, $A'B' = 12$ cm.

Rozwiązanie. Podstawiając dane sprawdzamy, czy zachodzi proporcja

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$$

Mamy:

$$\frac{12}{18} = \frac{8}{12}$$

Proporcja ta jest prawdziwa (dlaczego?), a więc $AA' \parallel BB'$.

Pytania

1. W jaki sposób z twierdzenia prostego tworzymy twierdzenie odwrotne?
2. Wypowiedzcie twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne względem niego.
3. Jaki sposób dowodzenia zastosowaliśmy w tej lekcji? Na czym ten sposób dowodzenia polega?
4. Przeprowadźcie dowód odwrotnego twierdzenia Talesa.
5. Czy prawdziwość twierdzenia prostego pociąga zawsze za sobą prawdziwość twierdzenia odwrotnego? Odpowiedź poprzyjcie przykładem!

Zadania*)

1. Sprawdzić, czy proste, o których mowa w przykładzie na str. 132, są równoległe, jeżeli:

a) $OB = 8$ cm, $AB = 3$ cm, $OA' = 6$ cm, $OB' = 10$ cm

b) $OB' = 6\frac{1}{2}$ cm, $A'B' = 4\frac{1}{3}$ cm, $OB = 4\frac{4}{5}$ cm, $AB = 3\frac{1}{5}$ cm.

2. Dany jest prostokąt $ABCD$. Zbudować prostokąt $A'B'C'D'$ o polu równym polu prostokąta $ABCD$ i o podstawie równej danemu odcinkowi c (c jest różne od każdego z boków prostokąta).

3*. Dany jest trójkąt ABC. Zbudować prostokąt o polu równym polu trójkąta ABC i o podstawie równej danemu odcinkowi a (a jest różne od każdego z boków trójkąta).

*) Zadania obejmują również materiał poprzednich lekcyj.

Odpowiedzi i wskazówki

1. a) nierównoległe; b) równoległe. **2.** Oznaczając boki prostokąta $ABCD$ przez a i b, niewiadomy zaś bok prostokąta $A'B'C'D'$ przez x, mamy równość $a \cdot b = c \cdot x$ równoważną proporcji $c:a = b:x$. Zatem x jest odcinkiem czwartym proporcjonalnym do trzech danych odcinków: c, a i b. **3.** Oznaczając podstawę trójkąta przez c, odpowiednią wysokość przez h, niewiadomy zaś bok prostokąta przez x, mamy równość $ax = \frac{c \cdot h}{2}$, którą możemy zapisać w postaci $2ax = ch$. Ostatnia równość jest równoważna proporcji $2a:h = c:x$. Zatem x jest odcinkiem czwartym proporcjonalnym do trzech danych odcinków: $2a$, h i c.

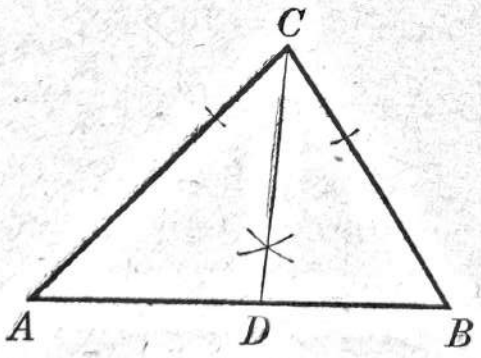
LEKCJA 26

Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie

Materiał pierwszego okresu roku szkolnego kończymy dowodem twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie. Dowód oprzemy na twierdzeniu Talesa.

Niech będzie dany trójkąt ABC, w którym narysowano dwusieczną CD kąta ACB (rys. 44a).

TWIERDZENIE. **Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli bok przeciwległy na odcinki proporcjonalne do boków przyległych.**



Rys. 44a

Założenie:

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$$

Teza:

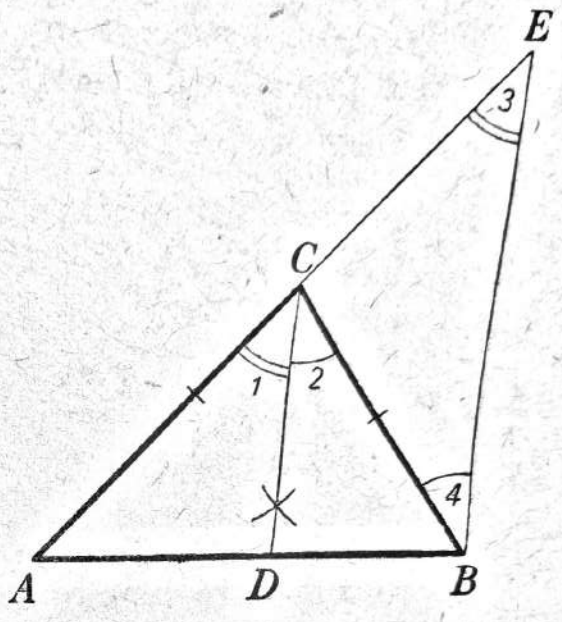
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$$

Dowód. Dla dowodu uzupełniamy rysunek w ten sposób, że przedłużamy bok AC i przez wierzchołek B kreślimy prostą równoległą do dwusiecznej CD. Punkt prze-

cięcia tej równoległej z przedłużeniem boku AC oznaczamy literą E. Wreszcie oznaczamy kąty jak na rys. 44b.

Zauważmy, że rys. 44b przypomina figurę poznaną przy dowodzie twierdzenia Talesa. Istotnie, mamy tu kąt A, którego ramiona są przecięte dwiema równoległymi: DC i BE. Możemy więc — uwzględniając zmianę oznaczeń — zastosować proporcję (2) ze str. 124:

(p) $$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CE}$$



Rys. 44b

Proporcja ta różni się od proporcji będącej tezą naszego twierdzenia (porównajcie) tylko wyrazem czwartym. Jeśli wykażemy więc równość odcinków CE i CB, to twierdzenie będzie udowodnione.

Popatrzmy na rysunek 44b. Widzimy, że:

$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 1$ jako kąty odpowiadające przy prostych równoległych DC i BE przeciętych sieczną AE;

$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 2$ jako kąty naprzemianległe wewnętrzne przy prostych równoległych DC i BE przeciętych sieczną BC.

Prawe strony tych równości są — z założenia — równe, więc i lewe ich strony są równe

$$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$$

Jeśli zaś $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$, to trójkąt BEC jest równoramienny i

$$CB = CE$$

W proporcji (p) podstawiamy więc zamiast odcinka CE odcinek CB i otrzymujemy proporcję

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$$

której prawdziwość mieliśmy wykazać.

Uwaga. Twierdzenie nasze udowodniliśmy dla każdego trójkąta.

Jeśli w $\triangle ABC$ (rys. 44a) boki AC i CB są równe, to — zgodnie z tym twierdzeniem — odcinki AD i BD są także równe. Wniosek ten nie dziwi nas; wszak wiemy z klasy VIII, że w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta zawartego między równymi bokami dzieli bok przeciwległy na połowy (czyli jest środkową trójkąta).

Rozwiążmy teraz następujące zadanie.

Zadanie. Boki trójkąta ABC są: $AC = 12$ cm, $BC = 14$ cm, $AB = 16$ cm. Obliczyć odcinki, na które dwusieczna kąta A dzieli bok przeciwległy.

Rozwiązanie:

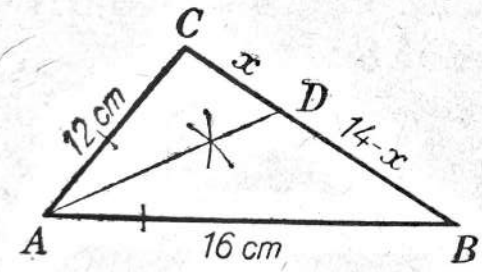
Dane: $AC = 12$ cm, $BC = 14$ cm, $AB = 16$ cm.

Obliczyć: CD i DB (rys. 45).

Skoro $BC = 14$ cm, to możemy wprowadzić oznaczenia

$$CD = x, \quad DB = 14 - x$$

Stosując następnie twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie, otrzymujemy kolejno:



Rys. 45

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{x}{14-x} = \frac{12}{16}$$

$$\frac{x}{14-x} = \frac{3}{4}$$

$$4x = 42 - 3x, \quad 4x + 3x = 42, \quad 7x = 42, \quad x = 6$$

Zatem $CD = x = 6$ cm, $DB = 14 - x = 8$ cm.

Odpowiedź. Dwusieczna kąta A dzieli bok BC na odcinki: $CD = 6$ cm i $DB = 8$ cm.

Pytania

1. Wypowiedzcie i udowodnijcie twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie.

Jak uzupełniamy rysunek? Z jakich twierdzeń korzystamy przy dowodzie tego twierdzenia?

2. Przypomnijcie sobie wiadomości o kątach, jakie powstają przy przecięciu prostych równoległych prostą sieczną.

Zadania

1. Boki trójkąta ABC są: $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 6$ cm. Obliczyć odcinki, na które dwusieczna kąta B dzieli bok przeciwległy.

2. W trójkącie ABC mamy $b = 10$ cm, $c = 8$ cm. Obliczyć długość boku a wiedząc, że odcinki BD i DC wyznaczone przez dwusieczną kąta A na boku BC różnią się o 1,5 cm.

3. W trójkącie ABC suma boków AC i CB wynosi 22 cm, dwusieczna kąta C dzieli bok przeciwległy na odcinki 3 cm i 8 cm. Obliczyć boki trójkąta.

***4.** Obwód trójkąta ABC wynosi 54 cm. Dwusieczna kąta A dzieli bok BC na odcinki $BD = 8$ cm i $DC = 12$ cm. Obliczyć boki trójkąta.

Odpowiedzi

1. $2\frac{2}{3}$ cm i $3\frac{1}{3}$ cm. **2.** 13,5 cm. Wskazówka. $BD = x$, $DC = x+1{,}5$. **3.** 6 cm, 11 cm, 16 cm. **4.** 13,6 cm, 20 cm, 20,4 cm. Wskazówka. Z warunków zadania wywnioskować, że suma boków AB i AC wynosi 34 cm.

POWTÓRZENIE ALGEBRY

1. Podajcie określenie potęgi. Co nazywamy podstawą, a co wykładnikiem potęgi? Podajcie przykłady potęg.
2. Wymieńcie podstawowe reguły potęgowania.
3. Podajcie określenie pierwiastka kwadratowego z liczby a.
4. Podajcie określenie pierwiastka n-tego stopnia z liczby a.
5. Co nazywamy pierwiastkiem arytmetycznym n-tego stopnia z dodatniej liczby a?
6. Jak wykazać, że $\sqrt{2}$ nie oznacza liczby całkowitej ani ułamkowej?

7. Jak nazywamy liczby wyrażone symbolami $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ itp.? Co to są liczby rzeczywiste?

8. Dlaczego pierwiastek stopnia parzystego z liczby ujemnej nie istnieje?

9. Napiszcie wzory, za pomocą których pierwiastkujemy iloczyn i iloraz liczb dodatnich. Podajcie przykłady zastosowania tych wzorów. Wzory te uzasadnijcie.

10. Wymieńcie reguły mnożenia i dzielenia arytmetycznych pierwiastków o jednakowych wykładnikach z liczb dodatnich. Podajcie przykłady.

11. Uzasadnijcie wzór $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$, gdzie $a > 0$ oraz m i n są to liczby naturalne, większe od 1. Omówcie zastosowanie tego wzoru na przykładzie $\sqrt[3]{64^4}$.

12. Wypowiedzcie regułę potęgowania pierwiastka. Uzasadnijcie ją i podajcie przykłady na zastosowanie tej reguły.

13. Podajcie wzór, za pomocą którego można przekształcić arytmetyczny pierwiastek z pierwiastka i napisać go pod postacią jednego pierwiastka. Wzór ten uzasadnijcie.

14. Z jakiego wzoru wychodzimy, wyprowadzając regułę wyłączania czynnika przed znak pierwiastka i włączania czynnika pod znak pierwiastka? Omówcie te reguły na przykładach $\sqrt[3]{16a^4b^5}$ i $3a^2b\sqrt{ab}$.

15. Wyrażenie $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}$ napiszcie pod postacią jednego pierwiastka i uzasadnijcie sposób postępowania.

16. Jakie działania można wykonać na wykładniku pierwiastkowym i na wykładniku potęgowym liczby podpierwiastkowej, aby wartość pierwiastka nie uległa zmianie? Uzasadnijcie odnośną regułę.

17. Omówcie sposób postępowania przy mnożeniu i dzieleniu arytmetycznych pierwiastków o różnych wykładnikach. Np. $2\sqrt[3]{2a^2} \cdot 3\sqrt{3ab} \cdot \sqrt[6]{a^5b^3}$

18. Wyjaśnijcie, co znaczy sprowadzić pierwiastek do postaci najprostszej. Wykonajcie odpowiednie przekształcenia np. dla $\sqrt[4]{144}$.

19. Wyjaśnijcie, w jakim celu ułamek przekształcamy tak, by w jego mianowniku nie występowała niewymierność.
20. Omówcie sposób postępowania przy uwalnianiu mianownika ułamka od niewymierności na przykładach:

a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{1}{b\sqrt{a}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$ d) $\frac{1}{b\sqrt[n]{a^k}}$ e) $\frac{1}{a-\sqrt{x}}$

f) $\frac{1}{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}$ $(a>0,\ x>0,\ y>0,\ n>k)$,

POWTÓRZENIE GEOMETRII

1. Jakie odcinki nazywamy współmiernymi, a jakie niewspółmiernymi? Odpowiedź zilustrujcie przykładami.
2. Jakimi liczbami wyrażają się miary odcinków współmiernych z jednostką długości?
   Jakimi liczbami wyrażają się miary odcinków niewspółmiernych z jednostką długości?
   Co to są liczby niewymierne?
3. Podajcie określenie stosunku dwóch odcinków.
   Pokażcie na przykładzie, że stosunek odcinków nie zależy od jednostki długości.
4. Wypowiedzcie twierdzenie Talesa. Zróbcie rysunek, napiszcie założenie i tezę. Przeprowadźcie dowód.
5. Wypowiedzcie odwrotne twierdzenie Talesa. Zróbcie rysunek, napiszcie założenie i tezę. Przeprowadźcie dowód.
6. Wypowiedzcie twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie. Zróbcie rysunek, napiszcie założenie i tezę. Przeprowadźcie dowód.
7. Napiszcie wzór na pole prostokąta. Wyprowadźcie ten wzór zakładając, że miary boków prostokąta są ułamkami.
   Rysunek!
8. Napiszcie i uzasadnijcie wzór na obliczanie pola równoległoboku. Rysunek!
9. Napiszcie i uzasadnijcie wzór na pole trójkąta. Rysunek!
10. Omówcie dwa sposoby obliczania pola rombu.
11. Napiszcie i uzasadnijcie wzór na pole trapezu. Rysunek!

ZADANIA

1. A) Wykonać działania $\dfrac{\sqrt[3]{2\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{0{,}6} \cdot \sqrt[3]{0{,}4}}{\sqrt[3]{0{,}07}}$

Uzasadnić sposób postępowania.

B) Wypowiedzieć i udowodnić twierdzenie Talesa.

2. A) Wykonać działania i przedstawić wynik w najprostszej postaci.

$$\frac{\sqrt[4]{6a^3} \cdot \sqrt[4]{108a^{10}}}{\sqrt[4]{2a^7}}, \quad \text{gdzie} \quad a > 0$$

Uzasadnić sposób postępowania.

B) Wypowiedzieć i udowodnić odwrotne twierdzenie Talesa.

3. A) Obliczyć $2\sqrt{16^3} + 3\sqrt[3]{8^5} - \frac{1}{2}\sqrt{4^7}$

Z jakiego wzoru korzystamy przy obliczaniu?

B) Wypowiedzieć i udowodnić twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta.

4. A) Wykonać działania $(a\sqrt[3]{3a})^2 \cdot (3\sqrt[3]{2a^2})^4 \cdot (\sqrt[3]{a})^4$, gdzie $a > 0$

Jakie wzory stosujemy w tym zadaniu?

B) Wyprowadzić wzór na pole równoległoboku.

5. A) Napisać w postaci jednego pierwiastka

$$\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} \cdot \sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}, \quad \text{gdzie} \quad a > 0$$

B) Dany odcinek m podzielić na dwie części x i y proporcjonalne do dwóch danych odcinków a i b. Konstrukcję uzasadnić.

6. A) Włączyć czynnik pod znak pierwiastka

$$(a-b)\sqrt{\frac{1}{a-b}}, \quad \text{gdzie} \quad a > b > 0$$

B) Znaleźć odcinek x czwarty proporcjonalny do trzech danych odcinków a, b, c. Konstrukcję uzasadnić.

7. A) Wykonać działania $\left(\frac{2}{9}\sqrt[3]{2}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{2}\right):\frac{3}{2}\sqrt[6]{2}$

Uzasadnić sposób postępowania.

B) Omówić i uzasadnić dwa sposoby obliczania pola rombu.

8. A) Przedstawić pierwiastki w prostszej postaci, a następnie wykonać mnożenie $\sqrt[4]{a^6}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[6]{a^{15}}$, gdzie $a>0$. Jakie prawa stosujemy przy tych działaniach?

B) Wyprowadzić wzór na pole trapezu.

9. A) Wykonać działanie $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$

B) Wyprowadzić wzór na pole trójkąta.

10. A) Wykonać działanie $(\sqrt{7}-2\sqrt{2})^3$. Uzasadnić sposób postępowania.

B) Bok trójkąta ma 16 cm, wysokość opuszczona na ten bok ma 6 cm. Inny bok trójkąta ma 12 cm. Obliczyć wysokość opuszczoną na ten drugi bok.

11. A) Wykonać działania po uprzednim sprowadzeniu pierwiastków do postaci prostszej $(3\sqrt{12}-\sqrt{50})(\sqrt{18}+\sqrt{48})$. Uzasadnić sposób postępowania.

B) Omówić sprawę mierzenia odcinków w przypadkach:

a) gdy odcinek mierzony jest współmierny z jednostką długości;

b) gdy odcinek mierzony jest niewspółmierny z jednostką długości.

12. A) Uwolnić mianowniki ułamków od niewymierności, a następnie wykonać działania

$$\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

B) Podać określenie i omówić własności stosunku dwóch odcinków.

13. A) Uwolnić mianowniki ułamków od niewymierności, a następnie wykonać działania

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\quad \text{gdzie}\quad a>0,\quad b>0$$

B) Dwie równoległe przecinają jedno ramię kąta o wierzchołku O w punktach A i B, drugie zaś w punktach A' i B'. Obliczyć OB wiedząc, że $OA'+OB' = 15$ cm, $OA = 6{,}4$ cm, $OA' = 3$ cm.

14. A) Uwolnić mianowniki ułamków od niewymierności

$$\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}}, \quad \frac{a}{\sqrt[6]{a}}, \quad \frac{a}{\sqrt[5]{a^3}}, \quad \text{gdzie} \quad a > 0$$

Uzasadnić sposób postępowania.

B) Obwód trójkąta ABC wynosi 54 cm. Dwusieczna kąta A dzieli bok BC na odcinki $BD = 8$ cm i $DC = 12$ cm. Obliczyć boki trójkąta.

15. A) Uszeregować pierwiastki według wielkości

$$\sqrt{5}, \quad \sqrt[3]{11}, \quad \sqrt[6]{123}$$

Uzasadnić sposób postępowania.

B) Mając dany trójkąt ABC, zbudować trójkąt równoramienny o tym samym polu i o tej samej podstawie.

16. A) Wykonać działania $(3\sqrt{5})^2 + (2\sqrt[3]{3})^3 - 7(\sqrt[4]{36})^2$
Uzasadnić sposób postępowania.

B) Boki trójkąta prostokątnego wynoszą 18 cm, 24 cm i 30 cm.
Obliczyć wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną.

17. A) Wykazać, że $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną.

B) Przekątne rombu wynoszą odpowiednio 28 cm i 96 cm, bok rombu jest równy 50 cm. Obliczyć wysokość rombu.

18. A) Obliczyć wartości pierwiastków:

$$\sqrt{102400}, \quad \sqrt{40401}, \quad \sqrt{0{,}00001849}$$

B) Przekątne rombu są w stosunku 2:5. Pole rombu wynosi 16,2 m^2. Obliczyć przekątne rombu.

19. A) Obliczyć z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku:

$$\sqrt{5}, \quad \sqrt{3{,}4}, \quad \sqrt{\frac{3}{8}}$$

B) Dany jest prostokąt $ABCD$. Zbudować prostokąt $A'B'C'D'$ o polu równym polu prostokąta $ABCD$ i o podstawie równej danemu odcinkowi c (c jest różne od każdego z boków prostokąta).

20. A) Obliczyć krawędź sześcianu, którego objętość równa się objętości prostopadłościanu o wymiarach 4 cm, 8 cm, 16 cm.

B) W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przedłużono boki AD i BC do przecięcia w punkcie O. Obliczyć odcinek OD wiedząc, że jest on krótszy od odcinka OC o 2 cm, oraz że $AD = 28$ cm, $BC = 32$ cm.

OKRES II

Algebra

Równania kwadratowe i równania prowadzące do równań kwadratowych z jedną niewiadomą. Zastosowanie równań kwadratowych z jedną niewiadomą do rozwiązywania zadań tekstowych. Lekcje od 27 do 38.

Geometria

Figury jednokładne i ich własności. Lekcje od 39 do 42.
Figury podobne i ich własności. Cechy podobieństwa trójkątów. Stosunek pól figur podobnych. Lekcje od 43 do 50.

Powtórzenie algebry
Powtórzenie geometrii
Zadania

LEKCJA 27

A. Określenie równania kwadratowego

B. Równania kwadratowe niezupełne

C. Rozwiązywanie równań postaci $ax^2+bx=0$

A. W klasie VIII zajmowaliśmy się rozwiązywaniem równań stopnia pierwszego. Obecnie zajmiemy się równaniami stopnia drugiego.

OKREŚLENIE: **Równaniem drugiego stopnia** albo **równaniem kwadratowym** z jedną niewiadomą nazywamy takie równanie, którego lewa strona po uporządkowaniu jest wielomianem stopnia drugiego względem niewiadomej, a prawa — zerem.

Równanie kwadratowe ma postać

$$ax^2+bx+c = 0$$

gdzie a, b, c są danymi liczbami i nazywają się **współczynnikami** równania kwadratowego. Współczynniki mogą być zupełnie dowolne, pod warunkiem jednak, że a jest różne od zera ($a \neq 0$). W przeciwnym bowiem przypadku mielibyśmy równanie $bx+c = 0$, a więc równanie stopnia pierwszego.

Postać $ax^2+bx+c = 0$, gdzie $a \neq 0$, nazywa się **postacią ogólną równania kwadratowego.**

Musimy dobrze zapamiętać, że:
a jest współczynnikiem przy niewiadomej w drugiej potędze,
b jest współczynnikiem przy niewiadomej w pierwszej potędze,
c nazywamy wyrazem wolnym (od niewiadomej).
Weźmy równania o współczynnikach cyfrowych:

1) $3x^2-10x+3 = 0$
2) $x^2+3x-4 = 0$

i porównajmy z postacią ogólną równania kwadratowego

$$ax^2+bx+c = 0$$

Widzimy, że w pierwszym równaniu: $a = 3$, $b = -10$, $c = 3$,
a w drugim równaniu: $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$.

B. Równania kwadratowe niezupełne

Nadmieniliśmy już, że współczynniki a, b i c równania kwadratowego $ax^2+bx+c = 0$ mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi pod warunkiem, że $a \neq 0$. Może więc zdarzyć się, że współczynniki b lub c będą miały wartość zero. W tym wypadku równania przyjmą formę szczególną.

I. Jeżeli $b \neq 0$ i $c = 0$, to równanie kwadratowe ma postać:

$$ax^2+bx = 0,$$

II. Jeżeli $b = 0$ i $c \neq 0$, to równanie kwadratowe ma postać:

$$ax^2+c = 0,$$

III. Jeżeli $b = 0$ i $c = 0$, to równanie kwadratowe ma postać:

$$ax^2 = 0.$$

Równania postaci:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } ax^2+bx = 0 \\ \text{II. } ax^2+c = 0 \\ \text{III. } ax^2 = 0 \end{array}\right\} a \neq 0$$

nazywamy **równaniami kwadratowymi niezupełnymi.**

C. Rozwiązywanie równań kwadratowych niezupełnych postaci

$$ax^2+bx = 0.$$

Przykład 1. Rozwiążemy równanie: $x^2-5x = 0$.

Jest to równanie niezupełne postaci $ax^2+bx = 0$, w którym $a = 1$ i $b = -5$.

Po lewej stronie tego równania występują dwa składniki mające wspólny czynnik x. Wyłączamy ten czynnik poza nawias:

$$x(x-5) = 0$$

Lewa strona jest więc iloczynem dwu czynników, który równa się zeru, gdy przynajmniej jeden z czynników jest równy zeru.

$$x = 0$$

albo

$$x-5 = 0$$

a stąd

$$x = 5$$

Otrzymaliśmy dwie wartości na x, które mogą być pierwiastkami naszego równania i które oznaczymy przez x_1 i x_2.
Tak więc:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 5$$

Sprawdzamy, czy wartości te spełniają dane równanie. Oznaczmy wartość lewej strony równania przez L, a prawej przez P.
Dla $x = 0$ mamy: $L = 0^2-5 \cdot 0 = 0$; $P = 0$, a więc $L = P$
Dla $x = 5$ mamy: $L = 5^2-5 \cdot 5 = 0$; $P = 0$, a więc $L = P$
Wartości $x_1 = 0$ i $x_2 = 5$ spełniają nasze równanie, są więc jego pierwiastkami.

Przykład 2. Rozwiążmy równanie: $3x^2+7x=0$

W równaniu tym: $a=3$, $b=7$ i $c=0$.

Dzielimy obie strony równania przez 3 i otrzymujemy:

$$x^2+\frac{7}{3}x=0$$

Postępując dalej, jak w przykładzie 1, mamy

$$x\left(x+\frac{7}{3}\right)=0$$

a stąd

$$x=0$$

albo

$$x+\frac{7}{3}=0$$

skąd

$$x=-\frac{7}{3}$$

Tak więc:

$$x_1=-\frac{7}{3} \qquad x_2=0$$

Sprawdźcie, że liczby te są pierwiastkami danego równania.

Uwaga. Umówimy się, że przez x_1 oznaczać będziemy pierwiastek mniejszy, a przez x_2 większy.

Poznaną metodę zastosujemy do rozwiązania równania kwadratowego niezupełnego o współczynnikach literowych postaci:

$$ax^2+bx=0, \text{ gdzie } a\neq 0$$

Dzielimy obie strony równania przez a i otrzymujemy

$$x^2+\frac{b}{a}x=0$$

Wyłączamy x poza nawias:

$$x\left(x+\frac{b}{a}\right)=0$$

Ponieważ iloczyn dwu czynników jest równy zeru, gdy przynajmniej jeden z nich jest równy zeru, więc

$$x = 0$$

albo $$x+\frac{b}{a} = 0$$

a stąd $$x = -\frac{b}{a}$$

Tak więc

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Sprawdzenie wykazuje, że liczby te są pierwiastkami danego równania. Istotnie

dla $x = 0$ mamy: $L = a\cdot 0^2+b\cdot 0 = 0$; $P = 0$, a zatem $L = P$;

dla $x = -\frac{b}{a}$ mamy: $L= a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)^2+b\cdot\left(-\frac{b}{a}\right) = a\cdot\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{a} =$

$= \frac{b^2}{a}-\frac{b^2}{a} = 0$; $P = 0$, a zatem $L = P$.

Możemy więc powiedzieć, że:

Równanie kwadratowe niezupełne postaci $ax^2+bx = 0$, gdzie $a\neq 0$ i $b\neq 0$, ma zawsze dwa pierwiastki, z których jeden jest równy zeru, a drugi $-\frac{b}{a}$.

Przykład 3. Rozwiążmy równanie:

$$\frac{3x^2-x+2}{4}-\frac{x^2}{3} = \frac{x+3}{6}.$$

Pozbywamy się mianowników, mnożąc obie strony równania przez wspólny mianownik, tj. 12:

$$3(3x^2-x+2)-4x^2 = 2(x+3)$$

Wykonujemy wskazane działania, przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę równania i redukujemy wyrazy podobne.

$$5x^2-5x = 0$$

Dzielimy obie strony równania przez 5:

$$x^2 - x = 0$$

Otrzymaliśmy równanie postaci $ax^2+bx=0$, w którym $a=1$ i $b=-1$. Postępując jak w przykładach 1 i 2 mamy:

$$x(x-1)=0$$

stąd $$x=0 \text{ albo } x-1=0$$

a stąd $$x=1$$

Otrzymaliśmy więc

$$x_1=0 \qquad x_2=1$$

Sprawdzenie:

dla $x=0$ mamy $L=\dfrac{3\cdot 0^2-0+2}{4}-\dfrac{0^2}{3}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

$$P=\frac{0+3}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, \text{ a więc } L=P$$

dla $x=1$ mamy $L=\dfrac{3\cdot 1^2-1+2}{4}-\dfrac{1^2}{3}=\dfrac{4}{4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

$$P=\frac{1+3}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}, \text{ a więc } L=P.$$

Pytania

1. Podajcie określenie równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.
2. Podajcie określenie równania stopnia drugiego z jedną niewiadomą.
3. Napiszcie postać ogólną równania kwadratowego. Co możecie powiedzieć o współczynnikach równania kwadratowego?
4. Napiszcie równania kwadratowe mające postać niezupełną.
5. Rozwiążcie równanie mające postać $ax^2+bx=0$, gdzie $a \neq 0$. Wymieńcie kolejno czynności.
6. Co możecie powiedzieć o pierwiastkach równania niezupełnego $ax^2+bx=0$, gdzie $a \neq 0$?

Zadania

1. Rozwiążcie równania:

a) $3x^2-15x=0$

b) $2x^2=9x$

c) $-x^2-\frac{4}{5}x=0$

*d) $5x^2-3x=0$

*e) $-\frac{1}{3}x^2=\frac{4}{9}x$

*f) $\frac{8}{21}x=\frac{2}{7}x^2$

*g) $\frac{5}{6}x^2-1{,}5x=0$

h) $0{,}3x^2=1{,}26x$

2. Rozwiążcie równania:

a) $(x-5)^2=(x-2)(x-3)+19-x^2$

*b) $2(x+2)(x-1)+3(x+3)(x+1)=5$

*c) $(3x-2)(3x+2)=2(2x+1)^2-6$

*d) $\frac{3x}{4}-\frac{2x}{3}=\frac{x^2}{48}$

e) $\frac{(x-1)(x+1)}{3}-\frac{x-10}{12}=\frac{x+2}{4}$

f) $\frac{6x^2+1}{2}-\frac{5x-2}{5}-\frac{9}{10}=0$

*g) $(x+2)^3-8x^2=(x-1)^3+9$

*h) $\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2-\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\right)^2=x+8\frac{3}{4}$

3. Rozwiążcie równania:

a) $3ax+a^2=(a+x)^2$

b) $(x-a)^2=a(x+a)$

c) $(x-a)(x+a)=x(a+b)-a^2$

*d) $b(x^2+b)-a(x+a)=b(x+b)-a^2$

*e) $ax^2+b^2x = bx^2+a^2x$

*f) $\frac{2ax-b^2}{x^2-b} = b$

Odpowiedzi

1. a) 0,5, b) 0, $\frac{9}{2}$, c) 0, $-\frac{4}{5}$, d) 0, $\frac{3}{5}$, e) 0, $-\frac{4}{3}$, f) 0, $\frac{4}{3}$, g) 0, $\frac{9}{5}$, h) 0, 4,2. **2.** a) 0,5, b) 0, $-\frac{14}{5}$, c) 0,8, d) 0,4, e) 0,1, f) 0, $\frac{1}{3}$ g) 0, -9, h) 0, -24, **3.** a) 0, a, b) 0, $3a$, c) 0, $a+b$, d) 0, $\frac{a+b}{b}$, e) 0, $a+b$, f) 0, $\frac{2a}{b}$.

LEKCJA 28

Rozwiązywanie równań kwadratowych niezupełnych postaci $ax^2+c=0$

Przykład 1. Rozwiążmy równanie $x^2-4 = 0$.

Jest to równanie kwadratowe niezupełne, mające postać $ax^2+c = 0$, w którym $a = 1$ i $c = -4$.

Lewa strona tego równania jest różnicą kwadratów dwu wyrażeń. Rozkładamy ją na iloczyn sumy tych wyrażeń przez ich różnicę

$$(x+2)\ (x-2) = 0$$

Ponieważ iloczyn dwu czynników jest równy zeru, gdy przynajmniej jeden z czynników jest równy zeru, więc

$$x+2 = 0 \text{ albo } x-2 = 0$$

a stąd

$$x = -2 \text{ albo } x = 2$$

Otrzymaliśmy dwie wartości x, które oznaczamy przez x_1 i x_2:

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$$

Sprawdzając stwierdzamy, że liczby te są pierwiastkami danego równania.

Uwaga. Powtórzcie rozkład różnicy kwadratów na czynniki: str. 71, lekcja 13.

Przykład 2. Rozwiążmy równanie $2x^2-5=0$.

W równaniu tym: $a=2$, $b=0$ i $c=-5$

Dzielimy obie strony równania przez 2

$$x^2-\frac{5}{2}=0$$

Liczbę $\frac{5}{2}$ możemy napisać w postaci kwadratu innej liczby, a mianowicie:

$$\frac{5}{2}=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2$$

Tak więc mamy

$$x^2-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=0$$

Lewa strona równania jest różnicą kwadratów dwu wyrażeń. Postępując jak w przykładzie 1, otrzymamy kolejno:

$$\left(x+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=0$$

$$x+\sqrt{\frac{5}{2}}=0 \qquad \text{albo} \qquad x-\sqrt{\frac{5}{2}}=0$$

$$x=-\sqrt{\frac{5}{2}} \qquad \text{albo} \qquad x=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

a więc równanie ma dwa pierwiastki $x_1=-\sqrt{\frac{5}{2}}$, $x_2=\sqrt{\frac{5}{2}}$

Sprawdźcie, że wartości te są pierwiastkami danego równania.

Przykład 3. Rozwiążmy równanie $3x^2+7=0$.

Dzielimy obie strony równania przez 3 i otrzymujemy

$$x^2+\frac{7}{3}=0$$

czyli $$x^2+\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2=0$$

Po lewej stronie równania otrzymaliśmy sumę kwadratów postaci m^2+n^2, o której wiemy, że:

1. nie rozkłada się na iloczyn czynników,

2. jest nieujemna, tzn. jest zawsze dodatnia, a tylko w szczególnym przypadku równa zeru, gdy jednocześnie $m=0$ i $n=0$.

Ponieważ drugi składnik sumy kwadratów, a mianowicie $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2$ jest różny od zera, zatem wyrażenie $x^2+\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2$ dla każdej wartości x jest zawsze dodatnie, a zatem nie może być równe zeru. Znaczy to, że równanie $x^2+\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2=0$ jest sprzeczne i nie ma pierwiastków.

Przykład 4. Rozwiązać równanie

$$5x^2=0$$

Dzieląc obie strony równania przez 5, otrzymamy

$$x^2=0$$

a stąd $$x=0$$

Przykład 5. Rozwiążmy równanie

$$\frac{(4x-3)^2}{4}-\frac{(x-9)^2}{3}=2x^2-11$$

Mnożymy obie strony równania przez wspólny mianownik 12 i otrzymujemy

$$3(4x-3)^2-4(x-9)^2=24x^2-132$$

a stąd $$20x^2-165=0$$

Dzielimy obie strony równania przez 20 i otrzymujemy

$$x^2-\frac{33}{4}=0$$

czyli

$$x^2-\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2=0$$

Lewą stronę równania jako różnicę kwadratów dwu wyrażeń rozkładamy na iloczyn sumy tych wyrażeń przez ich różnicę:

$$\left(x+\frac{\sqrt{33}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{33}}{2}\right)=0$$

a stąd

$$x_1=-\frac{\sqrt{33}}{2} \qquad x_2=\frac{\sqrt{33}}{2}$$

Sprawdźcie, że otrzymane liczby są pierwiastkami danego równania.

Przykład 6. Rozwiążmy równanie

$$x(x-a)=a(a-x)-x^2$$

Wykonujemy wskazane działania i otrzymujemy kolejno:

$$x^2-ax=a^2-ax-x^2$$

$$x^2-ax-a^2+ax+x^2=0$$

$$2x^2-a^2=0$$

$$x^2-\frac{a^2}{2}=0$$

$$\left(x+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=0$$

Stąd

$$x_1=-\frac{a}{\sqrt{2}} \qquad x_2=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Sprawdźcie, że otrzymane liczby są pierwiastkami danego równania.

Zadania

1. Rozwiążcie równania:

a) $x^2-36=0$

b) $5x^2=0$

c) $-4x^2+25=0$

d) $x^2+10=0$

e) $-\frac{1}{2}x^2=0$

f) $x^2=5$

g) $-3x^2-1=0$

h) $\frac{3}{4}x^2=-\frac{1}{3}x^2$

i) $(2x-1)^2-(x-2)^2+x^2=3$

j) $3x^2+8=x^2+15$

k) $(x-1)(x+1)=8$

l) $\left(\frac{1}{3}x-2\right)\left(\frac{1}{3}x+2\right)=5$

2. Rozwiążcie równania:

a) $(3x+1)^2=(x+3)^2+8$

*b) $4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-(x+2)(x-6)=16$

*c) $\frac{x-3}{4}=\frac{10}{x+3}$

*d) $\frac{3x^2-2}{4}-\frac{4x^2}{3}=\frac{2}{3}$

e) $\frac{x(x-2)}{4}+\frac{x}{2}=25$

*f) $(2x-1)^3=8(x^2-4)(x-1)+38x-37$

g) $(x^2-3):3=(x^2+1):4$

*h) $(2x-5):(x+1)=(x-1):(2x+5)$

3. Rozwiążcie równania:

*a) $(x+a)(x-a)=b(2a+b)$

*b) $x(2x-a)=a(a-x)$

c) $(3x+a)^2+(3x-a)^2=20a^2$

*d) $\frac{x-3b}{b-x}=\frac{3b}{x}$

e) $x:(2x+5a)=a:(x+2a)$

Odpowiedzi

1. a) ∓ 6, b) 0, c) $\mp \frac{5}{2}$, d) nie ma, e) 0, f) $\mp \sqrt{5}$, g) nie ma, h) 0, i) $\mp \frac{\sqrt{6}}{2}$, j) $\mp \sqrt{\frac{7}{2}}$, k) ∓ 3, l) ∓ 9.

2. a) $\mp \sqrt{2}$, b) ∓ 1, c) ∓ 7, d) nie ma, e) ∓ 10, f) ∓ 1, g) $\mp \sqrt{15}$, h) $\mp 2\sqrt{2}$. **3.** a) $\mp (a+b)$, b) $\mp \frac{a}{\sqrt{2}}$, c) $\mp a$, d) $\mp b\sqrt{3}$, e) $\mp a\sqrt{5}$.

LEKCJA 29

Rozwiązywanie równań kwadratowych zupełnych o współczynnikach cyfrowych

Na poprzednich lekcjach zajmowaliśmy się rozwiązywaniem równań kwadratowych niezupełnych mających postać: $ax^2+bx=0$, $ax^2+c=0$ i $ax^2=0$, gdzie $a \neq 0$.

Obecnie przejdziemy do równań kwadratowych zupełnych mających postać

$$ax^2+bx+c=0, \qquad \text{gdzie } a \neq 0$$

Metodę ich rozwiązywania poznamy najpierw w przypadku, gdy współczynniki a, b, i c są wyrażone cyframi.

Przykład 1. Rozwiążmy równanie $x^2-6x+9=0$.
Po uważnym przyjrzeniu się lewej stronie równania stwierdzamy, że jest ona kwadratem dwumianu. Mamy więc kolejno

$$(x-3)^2=0$$

$$(x-3)(x-3)=0$$

$$x-3=0$$

$$x=3$$

Otrzymana wartość x spełnia dane równanie, jest więc jego pierwiastkiem.

Przykład 2. Rozwiążmy równanie: $x^2-8x+16 = 25$.

Lewa strona jest kwadratem dwumianu. Po przeniesieniu 25 na lewą stronę otrzymamy:

$$(x-4)^2-25 = 0$$

albo

$$(x-4)^2-5^2 = 0$$

Po lewej stronie równania powstała różnica kwadratów dwu wyrażeń, którą rozkładamy na iloczyn sumy tych wyrażeń przez ich różnicę:

$$(x-4+5)\ (x-4-5) = 0$$
$$(x+1)\ (x-9) = 0$$

Ponieważ iloczyn równa się zeru, gdy przynajmniej jeden z jego czynników równa się zeru, więc

$$x + 1 = 0 \text{ albo } x-9 = 0$$

Stąd otrzymujemy dwie wartości x:

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 9$$

Sprawdźcie, że liczby te są pierwiastkami danego równania.

Przykład 3. Rozwiążmy równanie: $x^2-8x+12 = 0$.

Lewa strona nie jest pełnym kwadratem dwumianu. Zauważmy jednak, że wyrażenie x^2-8x można potraktować jako dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia kwadratu dwumianu według wzoru

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2.$$

x^2 jest kwadratem pierwszego wyrazu x,
$8x$ jest podwojonym iloczynem pierwszego wyrazu przez drugi, czyli

$$8x = 2\cdot x\cdot 4$$

Do pełnego kwadratu dwumianu brakuje kwadratu drugiego wyrazu, tj. 4^2. Wartość lewej strony równania nie ulegnie zmianie, jeśli dodamy i jednocześnie odejmiemy 4^2. Otrzymujemy kolejno:

$$x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2-4^2+12 = 0$$
$$(x-4)^2-4 = 0$$
$$(x-4)^2-2^2 = 0$$

Doszliśmy do postaci znanej nam z przykładu 2. Zastosujmy opisany w tym przykładzie sposób postępowania:

$$(x-4+2)\ (x-4-2) = 0$$
$$(x-2)\ (x-6) = 0$$

a stąd $x-2 = 0$ albo $x-6 = 0$

Otrzymujemy dwie wartości x:

$$x_1 = 2 \quad \text{i} \quad x_2 = 6$$

Sprawdźcie, że otrzymane liczby są pierwiastkami danego równania.

Przykład 4. Rozwiążmy równanie: $x^2+7x-8 = 0$.

Powtarzamy rozumowanie z przykładu 3.

Do pierwszych dwu wyrazów x^2+7x dodajemy taki trzeci wyraz, by utworzył się kwadrat dwumianu.

x^2 jest kwadratem wyrazu pierwszego x,

$7x = 2\cdot x\cdot\frac{7}{2}$ jest podwojonym iloczynem wyrazu pierwszego przez drugi.

Drugim wyrazem dwumianu jest $\frac{7}{2}$, dodajemy więc, ale jednocześnie i odejmujemy kwadrat drugiego wyrazu: $\left(\frac{7}{2}\right)^2$.

Otrzymujemy

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{7}{2}+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2-8 = 0$$

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}-\frac{32}{4} = 0$$

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{81}{4} = 0$$

Postępując dalej jak w poprzednich przykładach, otrzymujemy

$$x_1 = -8 \qquad x_2 = 1$$

Sprawdźcie, że liczby te są pierwiastkami danego równania.

Uwaga. Z przerobionych przykładów widzimy, że przy rozwiązywaniu równania kwadratowego ważną czynnością jest dopełnienie wyrażenia mającego postać x^2+mx trzecim wyrazem tak, aby utworzył się kwadrat dwumianu. Jeśli wyraz mx jest podwojonym iloczynem wyrazu pierwszego x przez drugi, czyli jeśli jest

$$mx = 2 \cdot x \cdot \frac{m}{2}$$

to widzimy, że wyrazem drugim dwumianu jest połowa współczynnika przy x w pierwszej potędze.

Przykład 5. Rozwiążmy równanie: $2x^2-3x-5=0$.
Dzielimy obie strony równania przez 2:

$$x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}=0$$

Dwa pierwsze wyrazy dopełniamy do kwadratu dwumianu. Dodajemy i jednocześnie odejmujemy kwadrat połowy współczynnika przy x:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

Mamy:

$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-\frac{5}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{16}=0$$

Postępując dalej znanym sposobem, otrzymujemy

$$x_1=-1 \quad x_2=\frac{5}{2}$$

Sprawdźcie, że są to pierwiastki danego równania.

Przykład 6. Rozwiążmy równanie: $x^2+12x+40=0$.

Przekształcamy lewą stronę równania jak w poprzednich przykładach:

$$x^2+2\cdot x\cdot 6+6^2-6^2+40=0$$
$$(x+6)^2+4=0$$
$$(x+6)^2+2^2=0$$

Otrzymaliśmy sumę kwadratów, która ze względu na drugi składnik różny od zera jest zawsze dodatnia i nie może dla żadnej wartości x równać się zeru. Równanie jest więc sprzeczne i nie ma rozwiązań.

Pytania

1. Wypowiedzcie wzór na kwadrat dwumianu.
2. Do wyrażeń:
   a) x^2+bx
   b) $x^2+\frac{b}{a}x$

   dodajcie taki trzeci wyraz, by łącznie z pozostałymi utworzył kwadrat dwumianu. Wyjaśnijcie sposób postępowania.
3. Wymieńcie na przykładzie $2x^2-5x+2=0$ kolejne czynności przy rozwiązywaniu równań kwadratowych zupełnych.
4. Jak postępujecie, jeśli przy przekształceniu lewej strony równania kwadratowego zupełnego otrzymacie:
   a) różnicę kwadratów dwu wyrażeń postaci $(x-m)^2-n^2=0$
   b) kwadrat dwumianu „ $(x-m)^2=0$
   c) sumę kwadratów dwu wyrażeń „ $(x-m)^2+n^2=0$

   Co możecie powiedzieć o pierwiastkach równania w każdym z tych wypadków?

Zadania

1. Rozwiążcie pamięciowo równania:

   a) $(x-8)^2=0$

   b) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0$

   c) $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=0$

   *d) $(x-0{,}3)^2=0$

   *e) $(3x+1)^2=0$

   *f) $(2x-7)^2=0$

2. Rozwiążcie równania:

a) $x^2+10x+25=0$

b) $x^2-12x+36=0$

c) $x^2+x+\frac{1}{4}=0$

*d) $x^2-11x+\frac{121}{4}=0$

*e) $x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}=0$

*f) $16x^2-24x+9=0$

3. Rozwiążcie równania:

a) $(x-3)^2-16=0$

b) $(x+2)^2-9=0$

c) $(x+1)^2-25=0$

d) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=0$

*e) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{9}=0$

*f) $(x-5)^2-7=0$

*g) $(x+6)^2-3=0$

*h) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{8}{9}=0$

4. Rozwiążcie równania:

a) $x^2-6x+5=0$

b) $x^2+2x-8=0$

c) $x^2-10x+21=0$

*d) $x^2+4x-12=0$

*e) $x^2-9x+14=0$

*f) $x^2+x-6=0$

*g) $x^2-5x-6=0$

*h) $x^2-3x+2=0$

i) $2x^2+x-1=0$

j) $4x^2-25x+6=0$

*k) $2x^2-7x+3=0$

*l) $3x^2-4x-4=0$

*m) $5x^2-9x-2=0$

*n) $4x^2-8x+3=0$

*o) $9x^2+9x+2=0$

*p) $4x^2+5x-6=0$

***5.** Rozwiążcie równania i obliczcie pierwiastki z dokładnością do 0,01:

a) $x^2-2x-1=0$

b) $x^2-6x+4=0$

c) $x^2+2x-2=0$

d) $4x^2-12x+7=0$

e) $2x^2-5x+1=0$

f) $x^2-x-1=0$

g) $9x^2+12x-2=0$

h) $4x^2-8x+1=0$

*6. Wykażcie, że następujące równania nie mają pierwiastków:

a) $x^2+8x+20=0$
b) $x^2-6x+15=0$
c) $x^2-3x+7=0$
d) $2x^2-5x+9=0$
e) $3x^2-x+2=0$
f) $5x^2+2x+1=0$

Odpowiedzi

4. a) 1 i 5, b) −4 i 2, c) 3 i 7, d) −6 i 2, e) 2 i 7, f) −3 i 2, g) −1 i 6, h) 1 i 2, i) -1 i $\frac{1}{2}$, j) $\frac{1}{4}$ i 6, k) $\frac{1}{2}$ i 3, l) $-\frac{2}{3}$ i 2, m) $-\frac{1}{5}$ i 2, n) $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{2}$ o) $-\frac{2}{3}$ i $-\frac{1}{3}$, p) -2 i $\frac{3}{4}$.

5. a) −0,41 i 2,41, b) 0,76 i 5,24, c) −2,73 i 0,73, d) 0,79 i 2,21, e) 0,22 i 2,28, f) −0,62 i 1,62, g) −1,48 i 0,15, h) 0,14 i 1,86.

LEKCJA 30 i 31

Równanie kwadratowe zupełne o współczynnikach literowych

W lekcjach poprzednich nauczyliśmy się rozwiązywać równania kwadratowe zupełne o współczynnikach cyfrowych. Rozwiążemy teraz równanie kwadratowe w jego postaci ogólnej

$$ax^2+bx+c=0, \qquad \text{gdzie } a \neq 0.$$

Podzielmy obie strony równania przez a:

$$\text{(A)} \qquad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Wyrażenie $x^2+\frac{b}{a}x$ potraktujemy jako dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia kwadratu dwumianu według wzoru $(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$:

x^2 jest kwadratem pierwszego wyrazu x,

$\frac{b}{a}x$ jest podwojonym iloczynem pierwszego wyrazu x przez drugi, co napiszemy w postaci

$$\frac{b}{a}x = 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}$$

Do pełnego kwadratu dwumianu brakuje nam kwadratu drugiego wyrazu, tj. $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Dodajmy więc, ale jednocześnie odejmijmy $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, aby wartość wyrażenia po lewej stronie równania nie uległa zmianie. Otrzymamy:

$$x^2+2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

czyli

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

Przekształcając dalej, otrzymujemy kolejno:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

Wyrażenie b^2-4ac nazywamy **wyróżnikiem** równania kwadratowego i oznaczamy grecką literą Δ (delta)

$$\Delta = b^2-4ac$$

Wobec tego równanie nasze możemy napisać w postaci

(B)
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

Rozpatrzymy teraz 3 przypadki, zależnie od tego, czy wyróżnik jest dodatni, równy zeru czy też ujemny.

I przypadek: $\Delta > 0$.

Jeżeli $\Delta > 0$, to $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ i $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$

Równanie przybierze postać

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

Lewa strona jest różnicą kwadratów dwu wyrażeń. Rozkładamy ją na iloczyn sumy tych wyrażeń przez ich różnicę

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

Ponieważ iloczyn dwu czynników jest równy zeru, gdy przynajmniej jeden z nich jest równy zeru, więc otrzymamy:

$$x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \quad \text{albo} \quad x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$$

a stąd $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ albo $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Otrzymaliśmy dwie wartości x, które oznaczmy przez x_1 i x_2

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Sprawdzamy, czy wartości te są pierwiastkami naszego równania.

Dla $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ mamy:

$$L=a\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2+b\,\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+c=a\,\frac{b^2+2b\sqrt{\Delta}+\Delta}{4a^2}+$$

$$+\frac{-b^2-b\sqrt{\Delta}}{2a}+c=\frac{b^2+2b\sqrt{\Delta}+\Delta-2b^2-2b\sqrt{\Delta}+4ac}{4a}=$$

$$=\frac{-b^2+4ac+\Delta}{4a}=\frac{-b^2+4ac+b^2-4ac}{4a}=0$$

$$P=0, \text{ a zatem } \quad L=P$$

Podobnie można sprawdzić, że $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ również spełnia dane równanie.

Powiemy więc: **Jeżeli wyróżnik równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$, gdzie $a \neq 0$, jest dodatni ($\Delta > 0$), to równanie ma dwa różne pierwiastki wyrażone wzorami:**

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

II przypadek: $\Delta = 0$.

Z postaci (B) równania kwadratowego otrzymujemy

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right) = 0$$

a stąd $$x+\frac{b}{2a} = 0$$

czyli $$x = -\frac{b}{2a}$$

Ten sam wynik otrzymamy, biorąc pod uwagę wzory

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Zakładając, że $\Delta = 0$, mamy:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

Powiemy więc: **Jeżeli wyróżnik równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$, gdzie $a \neq 0$, jest równy zeru ($\Delta = 0$), to równanie ma dwa równe pierwiastki wyrażone wzorem**

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Uwaga. Mówi się też, że w przypadku $\Delta = 0$ równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek podwójny.

III przypadek: $\Delta < 0$.

Jeżeli $\Delta<0$, to $-\Delta>0$ i $-\Delta = \left(\sqrt{-\Delta}\right)^2$ oraz $\frac{-\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$

Równanie przyjmuje postać:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

Lewa strona — jako suma kwadratów — jest zawsze dodatnia, gdyż drugi składnik jest różny od zera. Nie ma więc takiej wartości x, dla której suma ta byłaby równa zeru. Równanie jest sprzeczne i nie ma rozwiązań.

Powiemy więc: **Jeżeli wyróżnik równania kwadratowego** $ax^2+bx+c=0$, **gdzie** $a \neq 0$, **jest ujemny** ($\Delta < 0$), **to równanie pierwiastków nie ma.**

Zestawiając rozpatrzone trzy przypadki, możemy ogólnie powiedzieć:

Warunkiem istnienia pierwiastków równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$, **gdzie** $a \neq 0$, **jest nieujemny wyróżnik** ($\Delta \geqslant 0$), **przy tym jeżeli** $\Delta > 0$, **to istnieją różne pierwiastki**

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

a jeżeli $\Delta = 0$, **to istnieją dwa równe pierwiastki**

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Wyprowadzone wzory na pierwiastki równania kwadratowego (przy $\Delta \geqslant 0$), są słuszne przy wszelkich dowolnych współczynnikach a, b, c, jeśli tylko $a \neq 0$. Wzorami tymi możemy się posługiwać i wobec tego staje się zbędne przeprowadzanie dla poszczególnych równań całości rozumowania prowadzącego do znalezienia ich pierwiastków.

Zastosowanie wzorów poznamy na przykładach.

Przykład 1. Rozwiązać równanie $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}=0$.

Mnożymy obie strony równania przez 6 celem pozbycia się współczynników ułamkowych. Otrzymamy

$$2x^2-3x-2=0$$

Porównując to równanie z równaniem $ax^2+bx+c=0$, mamy:

$$a=2, \quad b=-3, \quad c=-2$$

Obliczamy najpierw wyróżnik, gdyż od niego uzależnione jest istnienie pierwiastków.

$$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2) = 9+16 = 25;$$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$; $\Delta>0$, więc równanie ma 2 różne pierwiastki.

Obliczamy pierwiastki równania stosując poznane wzory:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Sprawdźcie!

Przykład 2. Rozwiązać równanie $5x^2+2x-1=0$.

Obliczamy wyróżnik: ($a=5$, $b=2$, $c=-1$)

$$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\cdot 5\cdot(-1) = 4+20 = 24;$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot 6}=2\sqrt{6}$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{6}}{10} = \frac{2(-1-\sqrt{6})}{10} = \frac{-1-\sqrt{6}}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2\sqrt{6}}{10} = \frac{2(-1+\sqrt{6})}{10} = \frac{-1+\sqrt{6}}{5}$$

Otrzymaliśmy dwa pierwiastki wyrażone liczbami niewymiernymi.

Możemy obliczyć przybliżenia dziesiętne tych pierwiastków. Np. z dokładności do 0,0001 mamy

$$x_1 \approx \frac{-1-2{,}4495}{5} = \frac{-3{,}4495}{5} = -0{,}6899$$

$$x_2 \approx \frac{-1+2{,}4495}{5} = \frac{1{,}4495}{5} = 0{,}2899$$

Przykład 3. Rozwiązać równanie: $\frac{4}{3}x^2-4x+3=0$.

Mnożymy obie strony przez 3 i otrzymujemy:

$$4x^2-12x+9=0$$

Obliczamy wyróżnik ($a=4,\ b=-12,\ c=9$)

$$\Delta = b^2-4ac = (-12)^2-4\cdot 4\cdot 9 = 144-144 = 0$$

Ponieważ $\Delta = 0$, więc równanie ma jeden pierwiastek podwójny

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Sprawdźcie!

Przykład 4. Rozwiązać równanie $7x^2+5x+2=0$.
Obliczamy wyróżnik: ($a=7,\ b=5,\ c=2$)

$$\Delta = b^2-4ac = 25-4\cdot 7\cdot 2 = 25-56 = -31$$

Ponieważ $\Delta < 0$, równanie nie ma pierwiastków.

Pytania

1. Napiszcie postać ogólną równania kwadratowego. Jakie należy uczynić zastrzeżenie co do współczynnika a i dlaczego?
2. Wyprowadźcie wzory na pierwiastki równania kwadratowego, objaśnijcie kolejne czynności.
3. Jakie wyrażenie nazywamy wyróżnikiem równania kwadratowego?

4. Co możecie powiedzieć o pierwiastkach równania kwadratowego, gdy a) $\Delta > 0$, b) $\Delta = 0$, c) $\Delta < 0$?
5. Jaki jest warunek istnienia pierwiastków równania kwadratowego?

Zadania

Rozwiążcie za pomocą wzorów równania na str. 161, lekcja 29, nr 4 i 5a, f.

LEKCJE 32 i 33

Rozwiązywanie równań kwadratowych za pomocą wzorów

W lekcji poprzedniej wyprowadziliśmy wzory na pierwiastki równania kwadratowego

$$ax^2+bx+c = 0, \quad \text{gdzie} \quad a \neq 0$$

oraz zastosowaliśmy te wzory do rozwiązywania równań o współczynnikach cyfrowych.

Celem dokładnego zapoznania się z tymi wzorami wykonamy dalsze ćwiczenia.

Przykład 1. Rozwiązać równanie $6x^2-24x-30 = 0$.

Zauważmy, że współczynniki tego równania są podzielne przez 6. Obie strony równania dzielimy przez wspólny podzielnik współczynników i otrzymujemy

$$x^2-4x-5 = 0$$

W równaniu tym $a = 1$, $b = -4$ i $c = -5$.

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\cdot 1\cdot(-5) = 16+20 = 36$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$.

Ponieważ $\Delta > 0$, równanie ma 2 różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-6}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+6}{2} = 5$$

Sprawdźcie!

Przykład 2. Rozwiązać równanie $-5x^2+21x-4=0$.

Obie strony równania pomnożymy przez -1, gdyż przy obliczaniu pierwiastków równania wygodniejsza jest postać, w której współczynnik a przy x^2 jest dodatni.

$$5x^2-21x+4=0$$

$$\Delta=(-21)^2-4\cdot 5\cdot 4=441-80=361;\ \sqrt{\Delta}=\sqrt{361}=19$$

Równanie ma dwa różne pierwiastki

$$x_1=\frac{21-19}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$x_2=\frac{21+19}{10}=\frac{40}{10}=4$$

Sprawdźcie!

Przykład 3. Rozwiązać równanie

$$(x-2)^2-18=(2x-3)(2x+3)-2x(x+4)$$

Wykonujemy wskazane działania

$$x^2-4x+4-18=4x^2-9-2x^2-8x$$

Wyrazy z prawej strony równania przenosimy na lewą, redukujemy wyrazy podobne i porządkujemy

$$x^2-4x+4-18-4x^2+9+2x^2+8x=0$$
$$-x^2+4x-5=0$$

Obie strony równania mnożymy przez -1.

$$x^2-4x+5=0$$
$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 5=16-20=-4$$

Ponieważ $\Delta<0$, równanie nie ma pierwiastków.

Przykład 4. Rozwiązać równanie

(A) $$\frac{2x-3}{x^2-2x+1}-\frac{5}{2x+2}=\frac{x-2}{x^2-1}$$

Jest to równanie ułamkowe, ponieważ niewiadoma x występuje w mianownikach ułamków. Aby się pozbyć mianowników, mnożymy

obie strony równania przez wspólny mianownik. Dla jego znalezienia należy wyrażenia występujące w poszczególnych mianownikach rozłożyć na czynniki. Otrzymujemy więc

$$\frac{2x-3}{(x-1)^2}-\frac{5}{2(x+1)}=\frac{x-2}{(x+1)(x-1)}.$$

Wspólnym mianownikiem jest: $2(x+1)(x-1)^2$.
Mnożąc obie strony równania przez ten wspólny mianownik, otrzymamy:

$$2(2x-3)(x+1)-5(x-1)^2=2(x-2)(x-1)$$

Wykonujemy wskazane działania, przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę, redukujemy wyrazy podobne i porządkujemy. Mamy kolejno:

$$2(2x^2-3x+2x-3)-5(x^2-2x+1)=2(x^2-2x-x+2)$$

$$4x^2-6x+4x-6-5x^2+10x-5-2x^2+4x+2x-4=0$$

$$-3x^2+14x-15=0$$

Mnożymy obie strony równania przez -1

(B) $$3x^2-14x+15=0$$

$$\Delta=(-14)^2-4\cdot3\cdot15=196-180=16;\ \sqrt{\Delta}=\sqrt{16}=4$$

Ponieważ $\Delta>0$, więc równanie (B) ma 2 różne pierwiastki:

$$x_1=\frac{14-4}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

$$x_2=\frac{14+4}{6}=3$$

Otrzymaliśmy: $x_1=\frac{5}{3}$ i $x_2=3$.

Sprawdzamy, czy otrzymane liczby są pierwiastkami danego równania:

Dla $x=\frac{5}{3}$ mamy:

$$L = \frac{2\cdot\frac{5}{3}-3}{\left(\frac{5}{3}\right)^2-2\cdot\frac{5}{3}+1} - \frac{5}{2\cdot\frac{5}{3}+2} = \frac{\frac{10}{3}-3}{\frac{25}{9}-\frac{10}{3}+1} - \frac{5}{\frac{10}{3}+2} =$$

$$= \frac{30-27}{25-30+9} - \frac{15}{10+6} = \frac{3}{4} - \frac{15}{16} = -\frac{3}{16}$$

$$P = \frac{\frac{5}{3}-2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2-1} = \frac{\frac{5}{3}-2}{\frac{25}{9}-1} = \frac{15-18}{25-9} = \frac{-3}{16}, \text{ a więc } L = P$$

Dla $x = 3$ mamy:

$$L = \frac{2\cdot 3-3}{3^2-2\cdot 3+1} - \frac{5}{2\cdot 3+2} = \frac{6-3}{9-6+1} - \frac{5}{6+2} = \frac{3}{4} - \frac{5}{8} =$$

$$= \frac{6-5}{8} = \frac{1}{8}$$

$$P = \frac{3-2}{3^2-1} = \frac{1}{9-1} = \frac{1}{8}, \text{ a więc } L = P$$

Równanie dane ma dwa pierwiastki: $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = 3$.

Przykład 5. Rozwiązać równanie

$$\frac{x^2-x}{2x-4} - \frac{x-1}{x-2} + \frac{3x-5}{3x-6} = \frac{1}{3x-6}$$

Dokonujemy rozkładu mianowników na czynniki:

$$\frac{x^2-x}{2(x-2)} - \frac{x-1}{x-2} + \frac{3x-5}{3(x-2)} = \frac{1}{3(x-2)}$$

Obie strony równania mnożymy przez wspólny mianownik: $6(x-2)$

$$3(x^2-x)-6(x-1)+2(3x-5) = 2$$
$$3x^2-3x-6x+6+6x-10-2 = 0$$
$$3x^2-3x-6 = 0$$

Dzielimy obie strony równania przez 3

$$x^2-x-2=0$$

$(a=1, \quad b=-1, \quad c=-2), \quad \Delta=1-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9;$
$\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

$$x_1=\frac{1-3}{2}=-1$$

$$x_2=\frac{1+3}{2}=2$$

Sprawdzamy, czy otrzymane wartości są pierwiastkami naszego równania. Dla $x_1=-1$ mamy:

$$L=\frac{1+1}{-2-4}-\frac{-1-1}{-1-2}+\frac{-3-5}{-3-6}=-\frac{2}{6}-\frac{2}{3}+\frac{8}{9}=-\frac{1}{3}-$$
$$-\frac{2}{3}+\frac{8}{9}=-1+\frac{8}{9}=-\frac{1}{9}$$

$$P=\frac{1}{-3-6}=-\frac{1}{9}, \quad \text{a więc } L=P$$

Dla $x_2=2$ mamy:

$$L=\frac{4-2}{4-4}-\frac{2-1}{2-2}+\frac{6-5}{6-6}$$

Widzimy, że przy $x=2$ ułamki występujące w równaniu tracą sens liczbowy, gdyż ich mianowniki stają się równe zeru. Zatem liczba 2 nie jest pierwiastkiem naszego równania. Równanie to ma tylko jeden pierwiastek $x=-1$.

Uwaga 1. Przykład ten potwierdza nam konieczność sprawdzenia, czy otrzymane na x wartości są istotnie pierwiastkami danego równania.

Uwaga 2. Wzory na pierwiastki równania kwadratowego zupełnego

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

można również stosować do równań kwadratowych niezupełnych

postaci $ax^2+bx=0$ i $ax^2+c=0$ $(a \neq 0)$. Nie należy jednak tego robić. Wygodniej jest stosować metody rozwiązywania podane w lekcjach 27 i 28.

Pytania

1. Wymieńcie czynności, jakie należy wykonać w ćwiczeniach a, b, c, d, e przed przystąpieniem do rozwiązywania za pomocą wzorów:
   a) $x^2+12-8x=0$
   b) $x^2+2x=3$
   c) $4x^2-10x+4=0$
   d) $-x^2+9x-14=0$
   e) $-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{30}=0$

2. Wymieńcie kolejne czynności, jakie wykonujecie przy rozwiązywaniu równania ułamkowego prowadzącego do równania stopnia drugiego, np. dla równania:

$$\frac{3x+1}{x^2-4}+1=\frac{x^2-6}{x^2-4x+4}$$

Zadania

1. Rozwiążcie za pomocą wzorów równania:
   *a) $x^2-3x-10=0$
   b) $-x^2+x+12=0$
   *c) $x^2+5x-6=0$
   *d) $x^2+12x+35=0$
   *e) $x^2+15x+44=0$
   *f) $-x^2-12x+189=0$
   g) $3x^2+3x-6=0$
   h) $-2x^2+28x-96=0$
   *i) $-2x^2+11x-5=0$
   *j) $2x^2+13x+6=0$
   *k) $-12x^2+10x+8=0$
   *l) $5x^2-19x-4=0$
   m) $x^2+\frac{1}{6}x=\frac{1}{3}$
   n) $\frac{1}{15}x+\frac{2}{5}=x^2$
   o) $0{,}2x^2=x+10$
   *p) $x^2+\frac{1}{7}=\frac{16}{21}x$

2. Rozwiążcie równania:
   *a) $5x^2-3x=3x^2+2x+3$
   b) $(2x-3)(x-8)-7x(x-3)=0$

*c) $3(x+2)^2-2(x-2)(x+3)=8$

*d) $(x-3)^2+x+5=2(x+4)$

e) $(4x+1)^2-(2x+1)^2=(3x+1)^2$

f) $(2x-5):(x-1)=(5x-3):(3x+5)$

*g) $1:(3x-4)=(x+2):8$

h) $\frac{x^2}{5}-\frac{2x}{3}=\frac{x+5}{6}$

*i) $\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{(3x-1)^2}{5}=\frac{x(2x-3)}{2}$

*j) $\frac{x^2}{18}-\frac{x+1}{3}=-\frac{7}{9}$

3. Rozwiążcie równania:

a) $3x+\frac{2}{x}=-5$

*b) $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2x}$

c) $\frac{5x}{2x-1}=\frac{9}{x}$

*d) $\frac{8-x}{x+1}=\frac{20}{x}$

e) $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+2}=1$

*f) $\frac{48}{x-1}-\frac{21}{x}=5$

g) $\frac{1}{x-3}-\frac{x-1}{x+5}=\frac{2}{3}$

*h) $\frac{12}{x+2}+3=\frac{10}{x-2}$

*i) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{30}$

*j) $\frac{x-2}{x-6}-\frac{x+1}{x+3}=1\frac{1}{2}$

*k) $\frac{1}{x}=\frac{5}{2x-1}-\frac{6}{2x+3}$

*l) $\frac{7}{x+1}-\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-3}=0$

m) $\frac{3x+2}{x^2-9}-\frac{2x-7}{x-3}=\frac{7}{x+3}$

n) $\frac{x^2-3}{4x^2+4x+1}+4=\frac{3x-1}{4x+2}$

*o) $\frac{3x+1}{x^2-4}+1=\frac{x^2-6}{x^2-4x+4}$

*p) $\frac{x+1}{3x-3}-\frac{1}{2x^2-2}-\frac{2x-1}{6x+6}=\frac{2}{3}$

4. Rozwiążcie równania:

a) $x^2-3ax-4a^2=0$

b) $x^2+7ax+10a^2=0$

*c) $x^2+4ax-21a^2=0$

*d) $4x^2-8ax+3a^2=0$

*e) $6x^2+ax-a^2=0$

*f) $a^2x^2-5ax+6=0$

*g) $4a^2x^2-8ax-5=0$

h) $x^2+8x-a(a-8)=0$

i) $x^2-2ax+a^2-25=0$

*j) $(2x-1)(2x+1)=a(4x-a)$

k) $x^2-(3a-1)x+2a(a-1)=0$

*l) $x(x+a)-2a(x-a)=8a^2$

*m) $\dfrac{2a}{x+a}+\dfrac{5a}{x-a}=3$

Odpowiedzi

1. a) -2 i 5, b) -3 i 4, c) -6 i 1, d) -7 i -5, e) -11 i -4, f) -21 i 9, g) -2 i 1, h) 6 i 8, i) $\frac{1}{2}$ i 5, j) -6 i $-\frac{1}{2}$, k) $-\frac{1}{2}$ i $\frac{4}{3}$, l) $-\frac{1}{5}$ i 4, m) $-\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$, n) $-\frac{3}{5}$ i $\frac{2}{3}$, o) -5 i 10, p) $\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{7}$.

2. a) $-\frac{1}{2}$ i 3, b) -2 i $\frac{12}{5}$, c) -8 i -2, d) 1 i 6, e) $-\frac{1}{3}$ i 1, f) -7 i 4, g) $-\frac{8}{3}$ i 2, h) $-\frac{5}{6}$ i 5, i) $-\frac{1}{2}$ i 2, j) 2 i 4.

3. a) -1 i $-\frac{2}{3}$, b) $-\frac{1}{2}$ i 1, c) $\frac{3}{5}$ i 3, d) -10 i -2, e) -12 i 10, f) $-\frac{2}{5}$ i 7, g) $-\frac{9}{5}$ i 4, h) $-\frac{14}{3}$ i 4, i) -5 i 6, j) -2 i 9, k) $-\frac{1}{6}$ i 3, l) $\frac{5}{2}$ i 5, m) $-\frac{11}{2}$ i 4, n) -1 i $-\frac{3}{28}$, o) -6 i 3, p) $-\frac{1}{4}$ i 2.

4. a) $-a$ i $4a$, b) $-5a$ i $-2a$, c) $-7a$ i $3a$, d) $\frac{a}{2}$ i $\frac{3a}{2}$, e) $\frac{a}{3}$ i $-\frac{a}{2}$, f) $\frac{2}{a}$ i $\frac{3}{a}$, g) $-\frac{1}{2a}$ i $\frac{5}{2a}$, h) $-a$ i $a-8$, i) $a-5$ i $a+5$, j) $\frac{a-1}{2}$ i $\frac{a+1}{2}$, k) $2a$ i $a-1$, l) $-2a$ i $3a$, m) $-\frac{2a}{3}$ i $3a$.

LEKCJA 34

Zastosowanie równań kwadratowych do zadań z treścią

W klasie VIII rozwiązywaliśmy zadania tekstowe, których treść prowadziła do ułożenia równania stopnia pierwszego. Po zapoznaniu się z metodą rozwiązywania równań kwadratowych, rozszerzymy tematykę zadań tekstowych.

Przypomnimy ogólne wskazania, o których musimy pamiętać, przystępując do rozwiązywania zadania tekstowego z jedną niewiadomą:

1. Czytamy uważnie treść zadania i jedną z występujących w nim a nie znanych nam wielkości obieramy za niewiadomą (przeważnie, lecz niekoniecznie tę, o którą pytają w zadaniu). Niewiadomą oznaczamy np. literą x i omawiamy ją pełnym zdaniem.

2. Jeżeli w zadaniu występują różne jednostki tego samego rodzaju, to sprowadzamy je do jednej i tej samej jednostki.

3. Wielkości występujące w zadaniu wyrażamy za pomocą niewiadomej i innych wielkości danych w treści zadania.

4. Mając już zapisane wszystkie wielkości, o których jest mowa w zadaniu, przystępujemy do najważniejszej czynności, to jest do zapisania równania. Musimy tu pamiętać, że w treści zadania jest zawsze ukryty znak równości, to znaczy jest zawsze powiedziane, które wielkości należy postawić po jednej, a które po drugiej stronie równania, aby między nimi zachodziła równość. Czasami nie jest to łatwe, czasami na wypisanych uprzednio wielkościach trzeba jeszcze wykonać dodatkowe działania. Jest to już kwestia wprawy wynikająca z dużej ilości rozwiązanych zadań.

5. Równanie rozwiązujemy.

6. Wartości niewiadomej sprzeczne z treścią zadania odrzucamy, np. gdy ilość ludzi wyraża się ułamkiem, długość boku liczbą ujemną itp.

7. Sprawdzamy otrzymane wartości niewiadomej, jednak nie przez podstawienie do równania, które mogliśmy błędnie ułożyć, a przez powtórne rozumowanie na podstawie treści zadania.

8. Podajemy odpowiedź na pytanie w pełnym zdaniu.

Po tych wstępnych uwagach przejdziemy do rozwiązywania przykładowych zadań.

Zadanie 1. Dwie liczby różnią się o 2. Różnica sześcianów tych liczb jest większa o 100 od sumy ich kwadratów. Jakie to liczby?

Rozwiązanie

1. Większą liczbą poszukiwaną jest $(x+2)$
   Mniejszą liczbą poszukiwaną jest x.

2. Różnica sześcianów tych liczb wynosi $(x+2)^3-x^3$.
   Suma kwadratów tych liczb wynosi $(x+2)^2+x^2$.

Według treści zadania różnica sześcianów jest większa od sumy kwadratów o 100.

3. Mamy więc równanie

$$[(x+2)^3-x^3]-[(x+2)^2+x^2] = 100$$

Wykonujemy kolejne przekształcenia:

$$(x^3+6x^2+12x+8-x^3)-(x^2+4x+4+x^2) = 100$$
$$6x^2+12x+8-2x^2-4x-4-100 = 0$$
$$4x^2+8x-96 = 0$$
$$x^2+2x-24 = 0$$

4. Po rozwiązaniu tego równania otrzymujemy

$$x_1 = -6 \text{ i } x_2 = 4$$

5. Obie wartości przyjmujemy.

6. Sprawdzenie	dla $x = -6$	dla $x = 4$
Większą liczbą poszukiwaną jest	$-6+2 = -4$	$4+2 = 6$
Mniejszą liczbą poszukiwaną jest	-6	4
Różnica sześcianów tych liczb wynosi	$(-4)^3-(-6)^3 = 152$	$6^3-4^3 = 152$
Suma kwadratów tych liczb wynosi	$(-4)^2+(-6)^2 = 52$	$6^2+4^2 = 52$
	$152-52 = 100$	$152-52 = 100$

zgodne z treścią zadania

Odpowiedź: Liczbami poszukiwanymi są -4 i -6 albo 6 i 4.

Zadanie 2. Suma dwu liczb wynosi 14. Znaleźć te liczby, jeżeli wiadomo, że suma ich kwadratów jest 50 razy większa od różnicy tych liczb.

Rozwiązanie

Większą liczbą jest x
Mniejszą liczbą jest $(14-x)$
Suma kwadratów tych liczb wynosi $[x^2+(14-x)^2]$
Różnica tych liczb wynosi $[x-(14-x)]$

Według treści zadania suma kwadratów szukanych liczb jest 50 razy większa od różnicy tych liczb. Mamy więc równanie

$$x^2+(14-x)^2 = 50[x-(14-x)]$$
$$x^2+196-28x+x^2 = 50x-700+50x$$
$$2x^2-128x+896 = 0$$
$$x^2-64x+448 = 0$$

Po rozwiązaniu tego równania otrzymujemy

$$x_1 = 8 \text{ i } x_2 = 56$$

Sprawdzenie	dla $x = 8$	dla $x = 56$
Większą liczbą jest	8	56
Mniejszą liczbą jest.....	$14-8 = 6$	$14-56 = -42$
Suma kwadratów liczb..	$8^2+6^2 = 100$	$56^2+(-42)^2 = 4900$
Różnicą liczb	$8-6 = 2$	$56-(-42) = 98$
	$50 \cdot 2 = 100$	$50 \cdot 98 = 4900$

zgodnie z treścią zadania

Odpowiedź. Poszukiwanymi liczbami są 8 i 6 albo 56 i -42.

Przejdziemy teraz do typowych zadań, w których wykorzystujemy własności naszego systemu liczenia, zwanego systemem dziesiątkowym pozycyjnym.

Wiemy, że na przykład:

$$427 = 4 \cdot 100+2 \cdot 10+7 = 4 \cdot 10^2+2 \cdot 10+7$$
$$3238 = 3 \cdot 1000+2 \cdot 100+3 \cdot 10+8 = 3 \cdot 10^3+2 \cdot 10^2+3 \cdot 10+8$$

Umowny system zapisywania liczb odnosi się tylko do cyfr 1, 2, 3, ..., 9 i cyfry 0, nie ma natomiast zastosowania do liczb zapisanych literami (a, b, ...).

Jeśli wiemy, że cyfrą dziesiątek jest a oraz cyfrą jedności b, to taką liczbę w systemie dziesiątkowym można zanotować tylko w jedyny sposób: $a \cdot 10+b = 10a+b$. Przypominamy, że wyrażenie ab (zgodnie z inną umową) oznacza iloczyn liczby a przez b.

Zadanie 3. W liczbie dwucyfrowej cyfra jedności jest o 2 większa od cyfry dziesiątek. Iloczyn tej liczby przez liczbę o tych samych cyfrach, lecz napisanych w przeciwnym porządku, wynosi 1008. Znaleźć tę liczbę.

Rozwiązanie. Liczbą poszukiwaną jest liczba dwucyfrowa; niewiadomą jest więc cyfra dziesiątek i cyfra jedności. Wprowadzamy oznaczenia:
Cyfrę dziesiątek poszukiwanej liczby oznaczymy przez x
Cyfrą jedności będzie zatem $(x+2)$
Liczbą poszukiwaną jest więc $10x+(x+2)$

Po przestawieniu cyfr powstaje inna liczba, w której:
Cyfrą dziesiątek jest $(x+2)$
Cyfrą jedności jest x
Liczbą o cyfrach przestawionych jest: $10(x+2)+x$

Według treści zadania mamy równanie

$$[10x+(x+2)]\,[10(x+2)+x] = 1008$$

Wykonujemy kolejne działania i porządkujemy:

$$(10x+x+2)\,(10x+20+x) = 1008$$
$$(11x+2)\,(11x+20)-1008 = 0$$
$$121x^2+22x+220x+40-1008 = 0$$
$$121x^2+242x-968 = 0$$
$$x^2+2x-8 = 0$$

Po rozwiązaniu tego równania otrzymujemy

$$x_1 = -4 \text{ i } x_2 = 2$$

Pierwszą wartość odrzucamy, gdyż cyfra nie może być ujemna; drugą wartość przyjmujemy.

Sprawdzenie

Cyfrą dziesiątek poszukiwanej liczby jest	2
Cyfrą jedności poszukiwanej liczby jest	$2+2=4$
Liczbą poszukiwaną jest	24
Liczbą o przestawionych cyfrach jest	42
Zgodnie z treścią zadania	$24 \cdot 42 = 1008$

Odpowiedź. Liczbą poszukiwaną jest 24.

Zadania

1. Suma dwu liczb wynosi $12\frac{1}{4}$, a ich iloczyn $37\frac{1}{8}$. Jakie to liczby?

2. Różnica dwu liczb wynosi $7\frac{1}{3}$, a ich iloczyn $122\frac{2}{3}$. Jakie to liczby?

3. Pole prostokąta wynosi 96 cm². Obliczyć boki tego prostokąta, jeżeli wiadomo, że różnią się one o 4 cm.

***4.** Pole trójkąta prostokątnego wynosi 28 cm². Obliczyć przyprostokątne tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że ich suma wynosi 15 cm.

***5.** Znaleźć dwie liczby, jeżeli wiadomo, że suma ich wynosi $6\frac{2}{3}$, a suma odwrotności tych liczb wynosi $\frac{5}{8}$.

6. Znaleźć takie trzy kolejne liczby naturalne, aby potrojony kwadrat środkowej liczby przekraczał o 47 sumę kwadratów liczb pozostałych.

***7.** Iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest mniejszy o 96 od sześcianu liczby największej. Jakie to liczby?

***8.** Dwie liczby różnią się o 3. Suma odwrotności tych liczb wynosi $\frac{5}{18}$. Jakie to liczby?

***9.** Iloczyn dwu kolejnych liczb parzystych jest mniejszy o 12 od jedenastokrotnej wartości większej liczby. Znaleźć te liczby.

***10** Z trzech liczb dodatnich pierwsza jest dwa razy większa od drugiej, a trzecia mniejsza o 5 od pierwszej. Iloczyn sumy tych liczb przez liczbę trzecią wynosi 1045. Znaleźć te liczby.

***11.** Z czterech liczb dodatnich pierwsza jest dwa razy większa od trzeciej, druga o 3 mniejsza od pierwszej, a czwarta o 2 większa od trzeciej. Iloczyn sumy tych liczb przez sumę liczby trzeciej i czwartej wynosi 656. Znaleźć te liczby.

12. W liczbie dwucyfrowej cyfra jedności jest o 3 mniejsza od cyfry dziesiątek. Iloczyn tej liczby przez liczbę o tych samych cyfrach, lecz napisanych w przeciwnym porządku, wynosi 2268. Jaka to liczba?

***13.** W liczbie dwucyfrowej cyfrą jedności jest 4. Iloczyn tej liczby przez liczbę o tych samych cyfrach, lecz napisanych w przeciwnym porządku, wynosi 1462. Jaka to liczba?

***14.** W liczbie dwucyfrowej suma cyfr wynosi 10. Iloczyn tej liczby przez liczbę o tych samych cyfrach, lecz napisanych w przeciwnym porządku, wynosi 2944. Jaka to liczba?

***15.** W liczbie dwucyfrowej cyfra dziesiątek jest o 4 mniejsza od cyfry jedności. Iloczyn tej liczby przez sumę jej cyfr wynosi 576. Jaka to liczba?

***16.** W liczbie dwucyfrowej cyfra dziesiątek jest o 5 większa od cyfry jedności. Iloczyn tej liczby przez sumę jej cyfr wynosi 648. Jaka to liczba?

***17.** W liczbie trzycyfrowej cyfrą dziesiątek jest 1. Cyfra jedności jest o 3 mniejsza od cyfry setek. Iloczyn tej liczby przez sumę jej cyfr wynosi 2466. Jaka to liczba?

***18.** W liczbie trzycyfrowej cyfra setek jest o 2 mniejsza od cyfry dziesiątek, a cyfra jedności o 2 większa od cyfry dziesiątek. Iloczyn tej liczby przez sumę jej cyfr wynosi 1215. Jaka to liczba?

Odpowiedzi

1. $5\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{4}$. Wskazówka. Jedną liczbą jest x, drugą $\left(12\frac{1}{4}-x\right)$. **2.** -8, $-15\frac{1}{3}$; $15\frac{1}{3}$, 8. Wskazówka: Większą liczbą jest $\left(x+7\frac{1}{3}\right)$, mniejszą x. **3.** 8, 12. **4.** 7, 8. Wskazówka: Jedną przyprostokątną jest x, a drugą $15-x$. **5.** $2\frac{2}{3}$, 4. Wskazówka: Odwrotnością liczby m nazywamy liczbę $\frac{1}{m}$. **6.** 6, 7, 8. **7.** 4, 5, 6. **8.** $\frac{6}{5}$, $-\frac{9}{5}$ albo 9, 6. **9.** 10, 12. Wskazówka: Liczbę parzystą ozna-

czamy przez $2n$, gdzie $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. **10.** 24, 12, 19. Wskazówka: Pierwszą liczbą jest $2x$, drugą x i trzecią $(2x-5)$. **11.** 14, 11, 7, 9. Wskazówka: Trzecią liczbą jest x. **12.** 63. **13.** 34. **14.** 46 albo 64. **15.** 48. **16.** 72. **17.** 411. Wskazówka: Cyfrą setek jest x, cyfrą dziesiątek 1 i cyfrą jedności $(x-3)$. Liczbą poszukiwaną jest $100x+10+(x-3) = 101x+7$, a sumą jej cyfr $x+1+(x-3) = 2x-2$. **18.** 135. Wskazówka: Cyfrą dziesiątek jest x.

LEKCJA 35

Zadania tekstowe prowadzące do równań kwadratowych

Zadanie **1.** W warsztacie mechanicznym polecono kilku tokarzom pracującym z jednakową wydajnością wytoczyć 238 wałków metalowych. Ponieważ w chwili rozpoczęcia pracy jeden z tokarzy zachorował, każdy z pozostałych zobowiązał się wytoczyć o 1 wałek więcej. W rezultacie wytoczono 240 wałków. Ilu tokarzy miało wykonać pracę?

Rozwiązanie

Pracę (tj. 238 wałków) miało wykonać x tokarzy.

Każdy tokarz miał wytoczyć $\frac{238}{x}$ wałków.

Pracę (tj. 240 wałków) wykonało $(x-1)$ tokarzy.

Każdy tokarz wytoczył $\frac{240}{x-1}$ wałków.

Według treści zadania liczba $\frac{240}{x-1}$ jest o 1 większa od liczby $\frac{238}{x}$,

mamy więc równanie

$$\frac{240}{x-1} - \frac{238}{x} = 1$$

Pozbywamy się mianowników, mnożąc obie strony równania przez $x(x-1)$. Mamy

$$240x-238(x-1) = x(x-1)$$
$$240x-238x+238 = x^2-x$$

a stąd

$$x^2-3x-238 = 0$$

Rozwiązując to równanie, otrzymujemy

$$x_1 = -14 \text{ i } x_2 = 17$$

Pierwsza wartość jest sprzeczna z warunkami zadania, odrzucamy ją, a przyjmujemy tylko drugą.

Sprawdzenie. Pracę miało wykonać 17 tokarzy, każdy z nich miał wytoczyć $\frac{238}{17} = 14$ wałków. Pracę wykonało $17-1 = 16$ tokarzy i każdy wytoczył $\frac{240}{16} = 15$ wałków. Istotnie, zgodnie z treścią zadania każdy tokarz wytoczył o 1 wałek więcej ($15-14 = 1$).

Odpowiedź. Pracę miało wykonać 17 tokarzy.

Zadanie 2. Spółdzielnia krawiecka zakupiła 75 m materiału podszewkowego w dwóch gatunkach. Za tańszy, którego cena była o 5 zł niższa na 1 m, zapłacono 1000 zł, a za droższy 1050 zł. Ile metrów materiału każdego gatunku kupiono?

Rozwiązanie

Droższego materiału kupiono x m.
Tańszego materiału kupiono $(75-x)$ m.

Za 1 m droższego materiału płacono $\frac{1050}{x}$ zł.

Za 1 m tańszego materiału płacono $\frac{1000}{75-x}$ zł.

Zgodnie z treścią zadania różnica cen wynosi 5 zł, mamy więc równanie

$$\frac{1050}{x} - \frac{1000}{75-x} = 5$$

Po rozwiązaniu tego równania otrzymujemy

$$x_1 = 35 \qquad x_2 = 450$$

Druga wartość jest sprzeczna z warunkami zadania, gdyż nie można było kupić 450 m materiału jednego gatunku, skoro ogółem kupiono 75 m. Przyjmujemy pierwszą wartość: $x = 35$ i sprawdzamy z treścią zadania.

Odpowiedź. Droższego gatunku kupiono 35 m, a tańszego 40 m.

Zadania

*1. Kupiono kilka brulionów za 28 zł. Gdyby za 1 brulion płacono o 50 groszy mniej, to za tę samą kwotę można byłoby kupić o 1 brulion więcej. Ile brulionów kupiono?

2. Pod budowę domu należy wykopać w określonym czasie 8000 m^3 ziemi. Ponieważ dziennie wydobywano o 50 m^3 więcej niż planowano, pracę ukończono na 8 dni przed terminem. W ciągu ilu dni miała być wykonana praca?

*3. Maszynistka ma do przepisania 96 stron rękopisu na określony termin. Gdyby dziennie przepisywała o 4 strony więcej, to pracę ukończyłaby na dwa dni przed terminem. W ciągu ilu dni maszynistka ma przepisać pracę?

4. Za 168 zł kupiono kilka metrów kretonu. Za taką samą kwotę kupiono płótna o 4 m mniej, płacąc za 1 m o 7 zł więcej niż za 1 m kretonu. Ile kupiono metrów kretonu i ile metrów płótna oraz po ile złotych płacono za 1 m?

*5. Turyści, wybierając się na wycieczkę, zakupili 12 puszek konserw. Za większe puszki zapłacono 100 zł, a za mniejsze 120 zł. Ile kupiono puszek każdego rodzaju, jeżeli za większą płacono o 10 zł drożej niż za mniejszą?

*6. W klasie zakupiono 15 biletów do teatru. Droższe kosztowały 96 zł, a tańsze 56 zł. Ile zakupiono biletów każdego rodzaju, jeżeli różnica ceny biletu wynosiła 4 zł?

*7. Klasa postanowiła zebrać 280 zł na zakupienie płyt do adaptera szkolnego. Ponieważ do klasy przybyło 5 nowych uczniów, składkę zniżono o 1 zł. Ilu uczniów było początkowo w klasie?

8. Klasa postanowiła zebrać 192 zł na zakupienie drobnych pomocy naukowych do wspólnego użytkowania. Ponieważ 2 uczniów odeszło, składkę podwyższono o 1 zł i zebrano 210 zł. Ile uczniów było początkowo w klasie?

9. Grupa robotników fabryki ma wykonać gwintowanie 1800 nakrętek. Ponieważ do grupy tej dołączono 2 robotników i każdy robotnik wykonał o 25 sztuk więcej niż początkowo planowano, wykonano 2500 nakrętek. Ile nakrętek miał wykonać każdy robotnik?

***10.** Na drodze długości 90 m toczy się koło. Jeżeli jego obwód zwiększymy o 30 cm, to na tej samej drodze wykona ono o 10 obrotów mniej. Jaki jest obwód koła?

***11.** Po odcinku długości 72 cm toczą się 2 koła, których obwody różnią się o 3 cm. Jedno z tych kół wykonało o 2 obroty mniej niż drugie. Ile obrotów wykonało każde koło?

****12.** Dwóm robotnikom polecono montować z gotowych części zamki do drzwi. Pracując razem przez 16 godzin, zmontowali 88 zamków. W ciągu ilu minut każdy robotnik montował 1 zamek, jeżeli jednemu z nich zajmuje to czasu o 4 minuty mniej niż drugiemu?

Odpowiedzi

1. 7 brulionów. **2.** 40 dni. **3.** 8 dni. **4.** 12 m, 8 m, 14 zł, 21 zł. **5.** 4 i 8 puszek. **6.** 8 i 7 biletów. **7.** 35 uczniów. **8.** 32 uczniów. **9.** 100 albo 225. **10.** 1,5 m. Wskazówka: Obwód koła wynosi x m. Na drodze 90 wykona ono $\frac{90}{x}$ obrotów. **11.** 8 i 6 obrotów. **12.** 20 min. i 24 min.

LEKCJA 36

Zadania tekstowe prowadzące do równań kwadratowych

Często spotykamy się z zadaniami, w których występują trzy wielkości: droga s, czas t i prędkość v. Jeżeli prędkość jest stała, to droga jest wprost proporcjonalna do czasu, co wyrażamy wzorem

$$s = vt$$

i stąd

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

Zadanie 1. Dwu rowerzystów przejechało drogę długości 24 km w różnym czasie. Jeden z nich, jadąc o 50 m na minutę prędzej niż drugi, odbył ją w czasie o 16 minut krótszym. Z jaką prędkością jechał każdy z rowerzystów?

Rozwiązanie. Dokonamy najpierw zamiany jednostek:

$$16 \text{ min.} = \frac{16}{60} \text{ godz.} = \frac{4}{15} \text{ godz.}$$

$$50 \text{ m/min} = 60 \cdot 50 \text{ m/godz} = 3000 \text{ m/godz} = 3 \text{ km/godz}$$

Wprowadzamy niewiadomą:

Pierwszy rowerzysta jechał z prędkością $(x+3)$ km/godz.
Drugi rowerzysta jechał z prędkością x km/godz.
Droga wynosi 24 km.

Pierwszy rowerzysta odbył drogę w czasie $\frac{24}{x+3}$ godz.

Drugi rowerzysta odbył drogę w czasie $\frac{24}{x}$ godz.

Według warunków zadania pierwszy rowerzysta odbył drogę w czasie o $\frac{4}{15}$ godz. krótszym niż drugi, a zatem liczba $\frac{24}{x+3}$ jest o $\frac{4}{15}$ mniejsza od liczby $\frac{24}{x}$, mamy więc równanie

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+3} = \frac{4}{15}$$

Upraszczamy przez 4, następnie pozbywamy się mianowników, mnożąc obie strony równania przez $15x(x+3)$

$$90(x+3) - 90x = x^2 + 3x$$

a stąd

$$x^2 + 3x - 270 = 0$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy

$$x_1 = -18 \text{ i } x_2 = 15$$

Pierwszą wartość jako sprzeczną z treścią zadania odrzucamy; przyjmujemy drugą $x = 15$.

Sprawdzenie

Pierwszy rowerzysta jechał z prędkością (15+3) km/godz = = 18 km/godz.

Drugi rowerzysta jechał z prędkością 15 km/godz.

Pierwszy przebył drogę w czasie $\frac{24}{18}$ godz. = 1 godz. 20 min.

Drugi przebył drogę w czasie $\frac{24}{15}$ godz. = 1 godz. 36 min.

Różnica czasów wynosi:

1 godz. 36 min. — 1 godz. 20 min. = 16 min. zgodnie z treścią zadania.

Odpowiedź. Jeden z rowerzystów jechał z prędkością 18 km/godz, a drugi 15 km/godz.

Zadanie 2. Z dwu miast odległych o 280 km wyjeżdżają jednocześnie 2 samochody i spotykają się po 2 godzinach. Pierwszy samochód przejeżdża 1 km w czasie o 0,25 minuty dłuższym niż drugi. W jakim czasie każdy z nich przejeżdża 1 km?

Rozwiązanie. Sprowadzimy do jednakowych jednostek, zamieniając 2 godziny na 120 min. Wprowadzamy niewiadomą.

Pierwszy samochód przejeżdża 1 km w czasie $(x+0{,}25)$ min.

Drugi samochód przejeżdża 1 km w czasie x min.

Do spotkania samochody jadą 120 min.

Pierwszy samochód przejechał do spotkania $\frac{120}{x+0{,}25}$ km.

Drugi samochód przejechał do spotkania $\frac{120}{x}$ km.

Zgodnie z treścią zadania mamy równanie

$$\frac{120}{x+0{,}25}+\frac{120}{x}=280$$

Po rozwiązaniu i sprawdzeniu otrzymujemy odpowiedź: Pierwszy samochód przejeżdża 1 km w czasie 1 minuty, a drugi w czasie 0,75 minuty.

Zadania

*1. Turyści wybrali się na wycieczkę, planując przejść 360 km w określonym czasie. Wycieczka trwała o 3 dni dłużej, gdyż turyści przechodzili dziennie o 6 km mniej niż planowali. Na ile dni była wyznaczona wycieczka?

2. Kilku studentów wybrało się na wycieczkę kajakami i ogółem przebyli 300 km. Gdyby przebywali dziennie o 5 km więcej, podróż trwałaby o 2 dni krócej. Ile km dziennie przepływali?

3. Z pewnego miasta wyjeżdżają jednocześnie dwa samochody w kierunku drugiego miasta odległego o 180 km. Jeden z nich, przejeżdżając na godzinę o 12 km więcej niż drugi, przyjeżdża do celu o $\frac{1}{2}$ godziny wcześniej. W ciągu ilu godzin przebył drogę każdy samochód?

4. Wioślarz przebywa drogę z A do B i z powrotem w ciągu 3 godzin. Odległość między A i B wynosi 12 km. Obliczyć prędkość prądu rzeki, jeżeli na stojącej wodzie wioślarz płynąłby z prędkością 9 km na godzinę.

*5. Statek przebywa w ciągu 8 godzin drogę z A do B i z powrotem. Wyznaczyć prędkość własną statku (tj. na stojącej wodzie), jeżeli wiadomo, iż prędkość prądu rzeki wynosi 2 km/godz, a odległość między A i B wynosi 30 km.

6. Rowerzysta przejechał 72 km w ciągu 5 godzin. Połowa drogi prowadziła po równym terenie, a pozostała część pod górę. Na drugim odcinku drogi jechał z prędkością o 6 km na godzinę mniejszą niż na pierwszym odcinku. Obliczyć, z jakimi prędkościami jechał rowerzysta na obu odcinkach drogi.

*7. Ze stacji A do stacji B, między którymi odległość wynosi 324 km, wyjeżdża pociąg towarowy, a w dwie godziny później oso-

bowy, który jadąc o 18 km na godzinę prędzej przybywa do B o godzinę wcześniej. W ciągu ilu godzin odbył drogę każdy pociąg?

*8. Turysta zaplanował pieszą wycieczkę na trasie 200 km. Wskutek złej pogody był w drodze o 2 dni krócej, a ponieważ przebywał dziennie o 5 km więcej niż planował, przeszedł 180 km. Ile km dziennie zamierzał przejść turysta?

9. Z dwu miejscowości oddalonych o 18 km wychodzą jednocześnie dwie osoby i spotykają się po 2 godz. Jedna z nich przechodzi 1 km w czasie o 3 minuty dłuższym niż druga. W jakim czasie każda z tych osób przebywa 1 km?

**10. Kierowca samochodowy zamierza odbyć drogę w ciągu 5 godz. przy utrzymaniu pewnej przeciętnej prędkości. $\frac{2}{5}$ drogi przebywa z prędkością o 8 km na godzinę mniejszą, a resztę z prędkością o 5 km na godz. większą. Do celu podróży przyjeżdża z opóźnieniem 10 minut. Jaką przeciętną prędkość ustalił kierowca?

**11. Kierowca samochodowy ma przejechać 420 km w określonym czasie. Po przejechaniu 200 km zatrzymuje się na 55 minut, a następnie, zwiększając dotychczasową prędkość o 20 km na godzinę, dojeżdża do miejsca w wyznaczonym czasie. Jaka była początkowa prędkość samochodu?

**12. Pociąg odjechał ze stacji z opóźnieniem 6 minut. Maszynista nadrabia to opóźnienie, jadąc do następnej stacji, oddalonej o 24 km, z prędkością o 8 km na godzinę większą, niż przewidywał rozkład jazdy. Jaka była prędkość pociągu według rozkładu jazdy?

Odpowiedzi

1. 12 dni. **2.** 25 km dziennie. **3.** 3 godz., $2\frac{1}{2}$ godz. **4.** 3 km/godz.

Wskazówka: Prędkość prądu rzeki wynosi x km/godz. Wioślarz płynie z prądem rzeki z prędkością $(9+x)$ km/godz, a przeciw prądowi z prędkością $(9-x)$ km/godz. **5.** 8 km/godz. **6.** 18 km/godz i 12 km/godz. **7.** 6 godz., 9 godz. **8.** 25 km dziennie. **9.** 12 min., 15 min. Patrz zadanie 2 — lekcja 48. **10.** 40 km/godz. Wskazówka: Przeciętna prędkość samochodu wynosi x km/godz, droga przebyta $5x$ km; $\frac{2}{5}$ drogi, tj. $2x$ km, samochód przejeżdża w ciągu

$\frac{2x}{x-8}$ godz., a resztę, tj. $3x$ km, w ciągu $\frac{3x}{x+5}$ godz. Mamy równanie: $\frac{2x}{x-8}+\frac{3x}{x+5}=5\frac{1}{6}$. **11.** 60 km/godz. Wskazówka: Początkowa prędkość samochodu x km/godz. Jadąc z prędkością $(x+20)$ km/godz, przejeżdża on 220 km w czasie o 55 min. krótszym niż przy prędkości x km/godz. **12.** 40 km/godz.

LEKCJA 37

Zadania tekstowe prowadzące do równań kwadratowych

Zadanie 1. Kupiono o 1 kg gruszek więcej niż jabłek. Za gruszki zapłacono 48 zł, a za jabłka 24 zł. Gdyby gruszek kupiono tyle, ile jabłek, a jabłek tyle ile gruszek, to razem zapłacono by 68 zł. Ile kg gruszek i jabłek kupiono?

Rozwiązanie

Jabłek kupiono x kg.

Gruszek kupiono $(x+1)$ kg.

Za 1 kg gruszek płacono $\frac{48}{x+1}$ zł.

Za 1 kg jabłek płacono $\frac{24}{x}$ zł.

Za x kg gruszek zapłacono by $\frac{48x}{x+1}$ zł.

Za $(x+1)$ kg jabłek zapłacono by $\frac{24(x+1)}{x}$ zł.

Zgodnie z treścią zadania mamy więc równanie

$$\frac{48x}{x+1}+\frac{24(x+1)}{x}=68$$

Upraszczamy przez 4, następnie pozbywamy się mianowników, mnożąc obie strony równania przez $x(x+1)$. Mamy kolejno:

$$\frac{12x}{x+1}+\frac{6(x+1)}{x}=17$$

$$12x^2+6x^2+12x+6=17x^2+17x$$

stąd $$x^2-5x+6=0$$

Po rozwiązaniu tego równania otrzymujemy

$$x_1=2 \text{ i } x_2=3$$

Sprawdzenie	dla $x=2$	dla $x=3$
Gruszek kupiono	$2+1=3$ kg	$3+1=4$ kg
Jabłek „	2 kg	3 kg
Za 1 kg gruszek płacono	$\frac{48}{3}=16$ zł	$\frac{48}{4}=12$ zł
Za 1 kg jabłek płacono	$\frac{24}{2}=12$ zł	$\frac{24}{3}=8$ zł
Za 2 kg gruszek zapłacono by	$2\cdot 16=32$ zł	$3\cdot 12=36$ zł
Za 3 kg jabłek zapłacono by	$3\cdot 12=36$ zł	$4\cdot 8=32$ zł
Razem zapłacono by zgodnie z treścią zadania	68 zł	68 zł

Odpowiedź. Zadanie ma dwa różne rozwiązania: Kupiono 3 kg gruszek i 2 kg jałbek albo 4 kg gruszek i 3 kg jabłek.

Zadanie 2. Właściciel sklepu nabył dwie partie towaru na łączną sumę 5500 zł. Na pierwszej partii zarobił 240 zł, a na drugiej 250 zł, przy tym zysk na drugiej partii był o 2% większy niż na pierwszej partii. Ile procent zysku miał właściciel na każdej partii?

Rozwiązanie

Zysk na pierwszej partii wynosił $x\%$, co stanowi 240 zł.

Zysk na drugiej partii wynosił $(x+2)\%$, co stanowi 250 zł.

Pierwszą partię towaru nabyto za $\frac{240\cdot 100}{x}$ zł.

Drugą partię towaru nabyto za $\frac{250 \cdot 100}{x+2}$ zł.

Według warunków zadania obie partie nabyto za 5500 zł, mamy więc równanie:

$$\frac{24000}{x} + \frac{25000}{x+2} = 5500$$

Po rozwiązaniu tego równania otrzymujemy

$$x_1 = -\frac{12}{11} \text{ i } x_2 = 8$$

Przyjmujemy tylko drugą wartość: $x = 8$.

Sprawdzenie. Zysk na pierwszej partii wynosił 8%, a na drugiej 10%. Pierwszą partię nabyto za $\frac{240 \cdot 100}{8} = 3000$ zł, a drugą za $\frac{250 \cdot 100}{10} = 2500$ zł, razem za (3000+2500) zł = 5500 zł, co jest zgodne z treścią zadania.

Odpowiedź. Właściciel zyskał na pierwszej partii 8%, a na drugiej 10%.

Zadania

*1. Kupiono po kilka metrów płótna dwu gatunków, których cena różniła się o 3 zł na 1 m. Za droższe płótno zapłacono 150 zł, a za tańsze 96 zł. Gdyby płótna droższego kupiono tyle, ile tańszego i odwrotnie, to za oba materiały zapłacono by jednakowe sumy. Po ile zapłacono za 1 m płótna każdego gatunku?

2. Dwu robotników, z których jeden pracował o 2 dni krócej od drugiego, otrzymało po 400 zł. Gdyby pierwszy pracował tyle dni, ile drugi, a drugi tyle dni, ile pierwszy, to razem otrzymaliby 820 zł. Ile dni pracował każdy robotnik i ile zł zarabiał dziennie?

*3. Przy wypłacie jeden z robotników otrzymał 540 zł, a drugi, który pracował o 2 dni krócej, 300 zł. Gdyby pierwszy pracował tyle dni, co drugi, a drugi tyle, co pierwszy, to razem otrzymaliby 810 zł. Ile dni pracował każdy robotnik?

4. Cena aparatu radiowego wynosiła 2000 zł. Cenę tę podwyższono najpierw o pewien procent, a następnie po pewnym czasie dokonano zniżki o 2% więcej, niż wynosiła poprzednia podwyżka. Zniżka ta wyniosła 216 zł. O ile procent podwyższono początkową cenę aparatu?

*5. Cenę materiału wynoszącą 400 zł zniżono o pewien niewielki procent. Po pewnym czasie dokonano powtórnej zniżki o ten sam procent, co poprzednio. Druga zniżka wynosiła 36 zł. O jaki procent zniżono początkową cenę materiału?

*6. Zakupiono na zimę 300 kg ziemniaków. Z tego odrzucono od razu pewien procent ziemniaków nie nadających się do przechowania, a z pozostałych dwa razy większy procent, niż poprzednio, odrzucono w czasie zimy. W rezultacie zużyto tylko 216 kg. Jaki procent ziemniaków odrzucono początkowo?

*7. W klasie kończącej liceum było 50 uczniów. Pewien procent uczniów nie otrzymał świadectwa dojrzałości, a spośród absolwentów taki sam procent jak poprzednio zrezygnował bądź nie dostał się na wyższe uczelnie. Ile procent uczniów nie otrzymało świadectwa dojrzałości, jeżeli wiadomo, iż 32 absolwentów wstąpiło na wyższe uczelnie?

8. Rzemieślnik otrzymał pożyczkę w wysokości 20 000 zł. Po roku spłacił 17 000 zł, a pozostałą sumę wraz odsetkami uregulował po drugim roku, wpłacając 3708 zł. Na jaki procent była udzielona pożyczka?

Odpowiedzi

1. 15 zł, 12 zł. 2. 8 dni, 10 dni, 50 zł i 40 zł. 3. 2 rozwiązania: 6 dni, 4 dni albo 12 dni, 10 dni. 4. 8%. 5. 10%. 6. 10%. 7. 20%. 8. 3%.

LEKCJA 38

Zadania tekstowe prowadzące do równań kwadratowych

Zadanie 1. Dwóch robotników, pracując razem, wykona pewną pracę w ciągu 6 godz. 40 min. Pracując oddzielnie pierwszy robotnik mógłby ją wykonać w czasie o 3 godz. dłuższym aniżeli drugi. W ciągu ilu godzin każdy robotnik wykonałby sam tę pracę?

Rozwiązanie

6 godz. 40 min. $= 6\frac{40}{60}$ godz. $= 6\frac{2}{3}$ godz. $= \frac{20}{3}$ godz.

Pierwszy robotnik wykona pracę sam w ciągu $(x+3)$ godz.
Drugi robotnik wykona pracę sam w ciągu x godz.

Pierwszy robotnik wykona w jedną godzinę $\frac{1}{x+3}$ pracy.

Drugi robotnik wykona w jedną godzinę $\frac{1}{x}$ pracy.

Pierwszy robotnik wykona w $\frac{20}{3}$ godzin $\frac{20}{3(x+3)}$ pracy.

Drugi robotnik wykona w $\frac{20}{3}$ godzin $\frac{20}{3x}$ pracy.

Ponieważ w ciągu $6\frac{2}{3}$ godz. obaj robotnicy pracując razem wykonają całą pracę, więc otrzymujemy równanie

$$\frac{20}{3(x+3)}+\frac{20}{3x}=1$$

Po rozwiązaniu tego równania mamy

$$x_1=-\frac{5}{3} \quad \text{i} \quad x_2=12$$

Przyjmujemy tylko drugą wartość: $x=12$.

Sprawdzenie. Pierwszy robotnik wykona pracę sam w ciągu $(12+3)$ godz. $=15$ godz., a drugi w ciągu 12 godz. Pierwszy robotnik w 1 godz. wykona $\frac{1}{15}$, a drugi $\frac{1}{12}$ pracy. W ciągu $6\frac{2}{3}$ godz. pierwszy robotnik wykona $\frac{20}{3}\cdot\frac{1}{15}=\frac{4}{9}$, a drugi $\frac{20}{3}\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{9}$ pracy. Razem wykonają: $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}=\frac{9}{9}=1$, a więc całą pracę.

Odpowiedź. Pierwszy robotnik wykona sam pracę w ciągu 15 godz., a drugi w ciągu 12 godz.

Zadanie 2. Do zbiornika prowadzą dwie rury. Przez pierwszą tylko rurę zbiornik napełnia się wodą w czasie o 5 godz. dłuższym aniżeli tylko przez drugą. Pierwsza rura była czynna 15 godz.; następnie wstrzymano dopływ wody przez tę rurę, a otwarto drugą, przez którą napełniła się pozostała część zbiornika w ciągu dalszych 8 godzin. W ciągu ilu godzin przez każdą rurę oddzielnie może napełnić się zbiornik?

Rozwiązanie

Przez pierwszą tylko rurę zbiornik napełnia się w ciągu $(x+5)$ godz. Przez drugą tylko rurę zbiornik napełnia się w ciągu x godz.

Przez pierwszą rurę w ciągu 1 godz. napełnia się $\frac{1}{x+5}$ zbiornika.

Przez drugą rurę w ciągu 1 godz. napełnia się $\frac{1}{x}$ zbiornika.

Przez pierwszą rurę w ciągu 15 godzin napełnia się $\frac{15}{x+5}$ zbiornika.

Przez drugą rurę w ciągu 8 godzin napełnia się $\frac{8}{x}$ zbiornika.

Ponieważ woda, dopływając przez pierwszą rurę 15 godz., a przez drugą 8 godz., napełnia cały zbiornik, więc mamy równanie

$$\frac{15}{x+5}+\frac{8}{x}=1$$

Po rozwiązaniu tego równania otrzymujemy

$$x_1=-2 \quad \text{i} \quad x_2=20$$

Przyjmujemy tylko drugą wartość: $x=20$.

Sprawdzenie. Przez pierwszą rurę napełnia się zbiornik w ciągu $(20+5)$ godz. $=25$ godz., a przez drugą w ciągu 20 godz. W 1 godzinę przez pierwszą rurę napełnia się $\frac{1}{25}$, a przez drugą $\frac{1}{20}$ zbiornika. W ciągu 15 godz. przez pierwszą rurę napełnia się $\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$

zbiornika, a w ciągu 8 godz. przez drugą $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ zbiornika, a więc razem $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$, tj. cały zbiornik.

Odpowiedź. Przez pierwszą tylko rurę napełni się zbiornik w ciągu 25 godz., a przez drugą w ciągu 20 godz.

Zadania

1. Dwóch robotników pracując razem wykona pewną pracę w ciągu 6 godz. Pracując oddzielnie pierwszy robotnik może ją wykonać w czasie o 5 godz. dłuższym, niż drugi. W ciągu ilu godzin każdy robotnik pracując sam może wykonać tę pracę?

*2. Dwu robotników pracując razem wykona pewną pracę w ciągu 13 godz. 20 min. Pierwszy robotnik pracując sam wykona tę pracę w czasie o 6 godz. krótszym, niż drugi. W ciągu ilu godzin każdy robotnik może wykonać sam tę pracę?

3. Robotnik otrzymał pewną pracę, przy wykonaniu której pracował 12 dni. Ponieważ zachorował, tę pracę ukończył drugi robotnik w 2 dni. W ciągu ilu dni pracę tę wykona oddzielnie każdy robotnik, jeżeli drugi potrzebuje o 5 dni mniej, niż pierwszy?

*4. Dwóch rzemieślników miało wykonać pewną pracę. Pracując oddzielnie, pierwszy może ją wykonać w czasie o 4 dni krótszym niż drugi. Rzemieślnicy pracowali wspólnie w ciągu 5 dni, a następnie pracował tylko drugi robotnik, który pracę ukończył w ciągu następnych 13 dni. W ciągu ilu dni każdy rzemieślnik może wykonać sam tę pracę?

5. Przez dwa krany, otwarte jednocześnie, napełnia się zbiornik w ciągu 3 godzin. Jeżeli otwarty jest tylko jeden kran, to przez drugi kran zbiornik napełni się w czasie o 8 godz. krótszym, niż przez pierwszy. W ciągu ilu godzin każdy kran oddzielnie może napełnić zbiornik?

*6. Otworzono 2 krany doprowadzające wodę do zbiornika. Po 12 minutach zamknięto jeden z nich, a drugi po następnych 8 minutach napełnił zbiornik. W ciągu ilu minut każdy kran oddzielnie napełni zbiornik, jeżeli przez drugi napełnia się on w czasie o 9 minut dłuższym, niż przez pierwszy?

**7. Do zbiornika prowadzą 3 rury. Przez pierwszą tylko rurę zbiornik napełnia się w czasie 2 razy dłuższym, przez drugą o 9 godzin dłuższym, a przez trzecią o 1 godz. 30 min. dłuższym, aniżeli przez trzy rury przy jednoczesnym ich otwarciu. W ciągu ilu godzin napełnia się zbiornik przez trzy rury otwarte jednocześnie?

**8. Trzech kosiarzy skosiło łąkę. Pierwszy z nich pracując tylko sam skosiłby ją w czasie 2 razy dłuższym, drugi w czasie o 15 godz. dłuższym, a trzeci o 6 godz. dłuższym od tego, który potrzebny jest trzem kosiarzom, gdy pracują razem. W ciągu ilu godzin kosiarze skoszą łąkę pracując razem?

Odpowiedzi

1. 15 godz., 10 godz. **2.** 24 godz., 30 godz. **3.** 15 dni, 10 dni.

Wskazówka: Pierwszy robotnik wykona pracę sam w ciągu x dni, a drugi w ciągu $(x-5)$ dni. Pierwszy robotnik pracował 12 dni, wykonując dziennie $\frac{1}{x}$ pracy, drugi pracował 2 dni, wykonując dziennie $\frac{1}{x-5}$ pracy. Mamy równanie: $\frac{12}{x}+\frac{2}{x-5}=1$. **4.** 20 dni, 24 dni.

Wskazówka: Pierwszy robotnik pracował 5 dni, drugi 18 dni. **5.** 12 godz., 4 godz. **6.** 27 min., 36 min. **7.** 1 godz. Wskazówka: Zbiornik przez trzy rury otwarte jednocześnie napełni się w ciągu x godzin, przez pierwszą tylko rurę w ciągu $2x$ godz., przez drugą rurę w ciągu $(x+9)$ godz. i przez trzecią rurę w ciągu $\left(x+1\frac{1}{2}\right)$ godz. Mamy równanie: $\frac{x}{2x}+\frac{x}{x+9}+\frac{x}{x+1\frac{1}{2}}=1$. **8.** 3 godz.

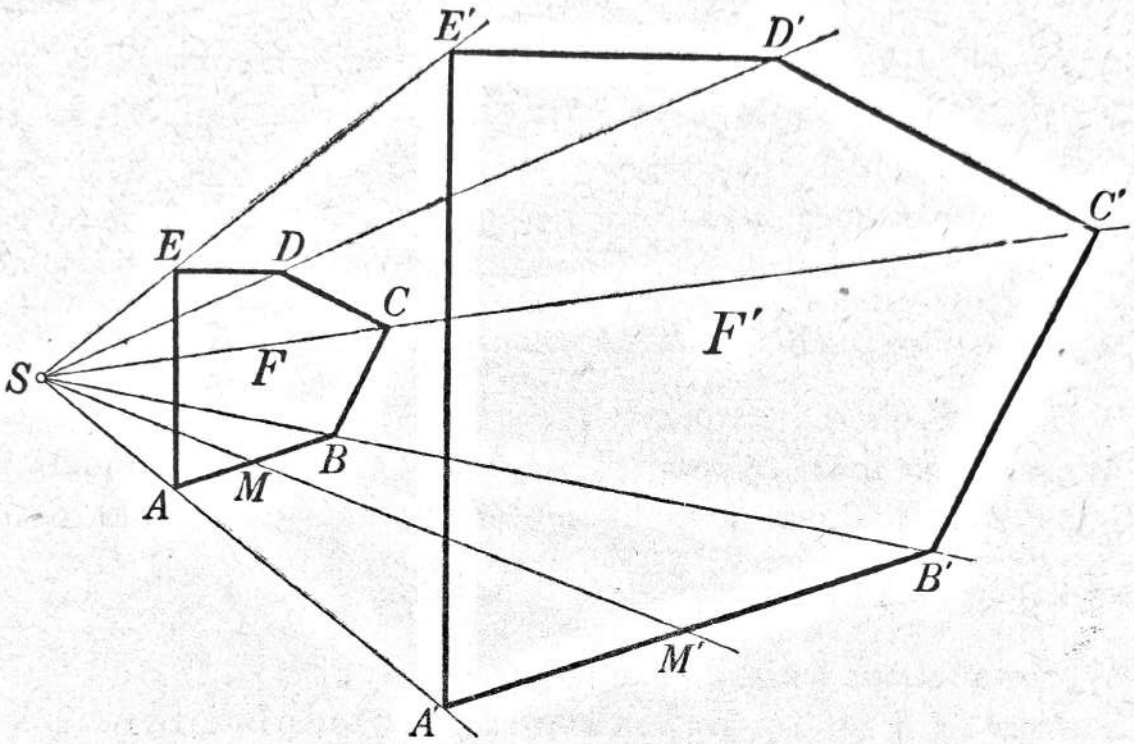
Wskazówka: Patrzcie zadanie 7.

LEKCJE 39 i 40

Figury jednokładne

W drugim okresie mamy przerobić obszerny dział geometrii, który można zatytułować: Jednokładność i podobieństwo. Na dzisiejszej lekcji zaznajomimy się z figurami jednokładnymi.

Niech będzie dana jakaś figura i pewien dowolny punkt S. Na rys. 46 figurą tą jest pięciokąt F, podkreślamy jednakże, że może to być dowolna figura — niekoniecznie wielokąt.



Rys. 46

Wyobraźmy sobie, że z punktu S wychodzą półproste przechodzące przez poszczególne punkty (nie tylko przez wierzchołki) danej figury. Na rys. 46 wykreślono tylko niektóre z tych półprostych, mianowicie półproste SA, SB, SM, SC, SD i SE.

Odłóżmy na półprostej SA odcinek SA' większy od SA pewną liczbę razy, np. 3 razy; podobnie na półprostej SB odłóżmy odcinek SB', 3 razy większy od odcinka SB, itd.

Otrzymane punkty A', B', C', D', E', M' itd. tworzą figurę F', która ma ten sam kształt, co figura F, ale jest od niej większa.

Mówimy, że **figura F' jest jednokładna do figury F.**

Punkt S nazywamy **środkiem jednokładności.**

Liczbę k określającą, ile razy odcinek SA' jest większy od odcinka SA (itd.) nazywamy **stosunkiem jednokładności.**

Uwaga. Kreśląc figurę $A'B'C'D'E'$ zakładaliśmy, że punkty jednokładne do punktów odcinka AB tworzą odcinek $A'B'$, punkty jednokładne do punktów odcinka BC tworzą odcinek $B'C'$ itd.

Postępowanie takie jest uzasadnione, gdyż zachodzi następujące twierdzenie, którego prawdziwość przyjmujemy bez dowodu:

Figurą jednokładną do odcinka jest odcinek.

Spójrzmy teraz na rys. 46 nieco inaczej. Wyobraźmy sobie mianowicie, że kolejność czynności przy wykonywaniu tego rysunku była inna od opisanej wyżej. Przypuśćmy, że była dana figura F' i punkt S; że wykreślono półproste SA', SB' itd. i na półprostej SA' odłożono odcinek SA trzy razy mniejszy od odcinka SA', na półprostej SB' odłożono odcinek $SB = \frac{1}{3} SB'$ itd. Punkty A, B, C, D, E, M, ... utworzyłyby figurę F.

Wobec tego możemy powiedzieć, że figura F jest jednokładna do figury F'; środkiem jednokładności jest ten sam punkt S, ale stosunek jednokładności równa się $\frac{1}{3}$ $\left(\text{ogólnie } \frac{1}{k}\right)$.

Wprowadzamy jeszcze następujące nazwy:

Punkty A i A' są punktami odpowiednimi figur jednokładnych F i F'; odpowiednimi punktami są również punkty B i B', C i C' itd.

Odcinki AB i $A'B'$, BC i $B'C'$, CD i $C'D'$ itd. są odcinkami odpowiednimi figur jednokładnych F i F'; odpowiednimi odcinkami są także (nie zaznaczone na rys. 46) przekątne AC i $A'C'$, AD i $A'D'$ itd.

Weźmy teraz pod uwagę kąt $A'SB'$ na rys. 46. Na jednym ramieniu tego kąta odłożone są odcinki $A'S$ i AS takie, że $\frac{A'S}{AS} = 3$, na drugim zaś ramieniu odłożone są odcinki $B'S$ i BS takie, że $\frac{B'S}{BS} = 3$. Oznacza to, że

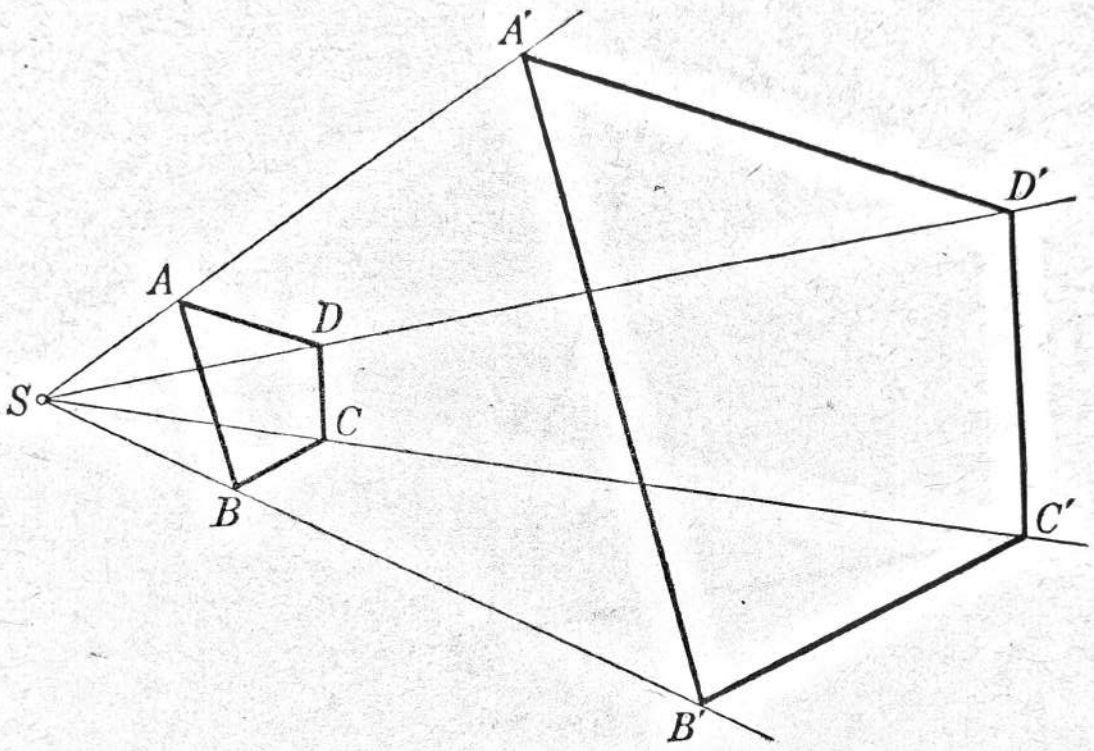
$$\frac{A'S}{AS} = \frac{B'S}{BS}$$

Ale jeśli zachodzi taka proporcja, to — jak wiemy z odwrotnego twierdzenia Talesa (str. 131), proste AB i $A'B'$ (a więc i odcinki AB i $A'B'$) są równoległe. Mamy więc $AB \| A'B'$. Podobnie: $BC \| B'C'$, $CD \| C'D'$ itd. Zatem:

Odpowiednie odcinki figur jednokładnych są równoległe.

Tę własność odcinków odpowiednich możemy wykorzystać przy wykreślaniu figur jednokładnych.

Przykład 1. Narysować figurę jednokładną do danego czworokąta $ABCD$ w stosunku $3\frac{1}{2}$.



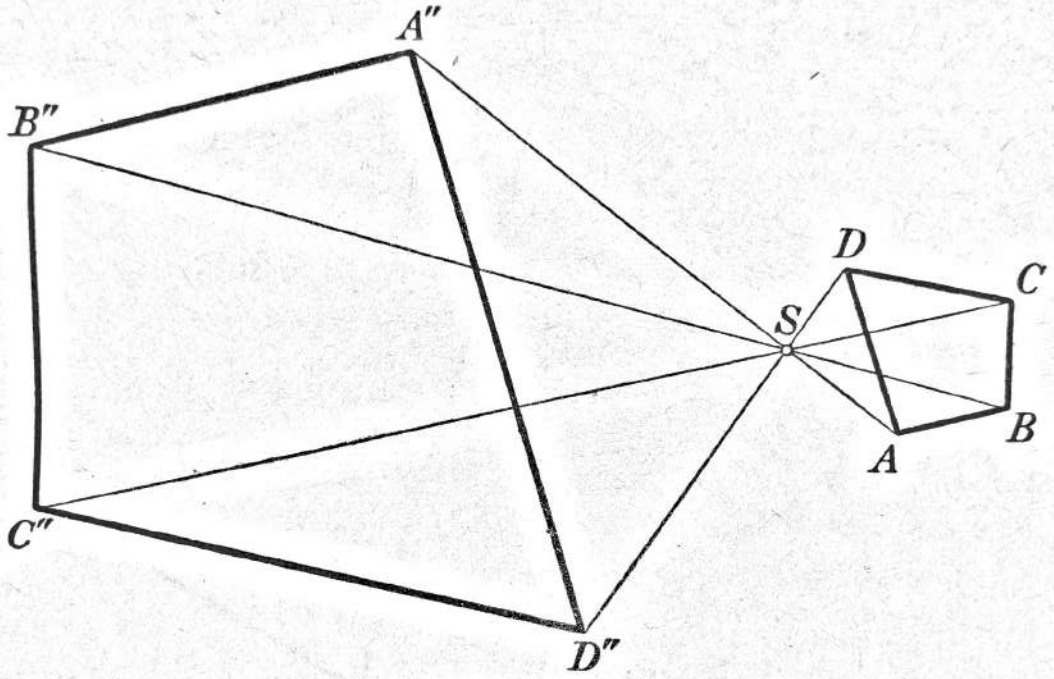
Rys. 47

Rozwiązanie. Dany jest czworokąt $ABCD$ (rys. 47). Obieramy środek jednokładności S i rysujemy półproste SA, SB, SC i SD. Następnie na półprostej SA odkładamy odcinek $SA' = 3\frac{1}{2}SA$. Teraz przez punkt A' rysujemy prostą równoległą do odcinka AD. Punkt przecięcia tej równoległej z półprostą SD oznaczamy literą D'. Z kolei przez punkt D' rysujemy prostą równoległą do odcinka DC, otrzymując punkt C', itd.

Skoro $\frac{SA'}{SA} = 3{,}5$ i $AD \| A'D'$, to — zgodnie z twierdzeniem Talesa (str. 121) — jest również $\frac{D'S}{DS} = 3{,}5$. Stąd zaś podobnie wywnioskujemy, że $\frac{C'S}{CS} = 3{,}5$ itd.

Zatem czworokąt $A'B'C'D'$ jest jednokładny do czworokąta $ABCD$ w stosunku $3\frac{1}{2}$.

Jednokładność objaśniona powyżej jest to tzw. jednokładność prosta. Oprócz niej rozważamy jeszcze jednokładność odwrotną.



Rys. 48

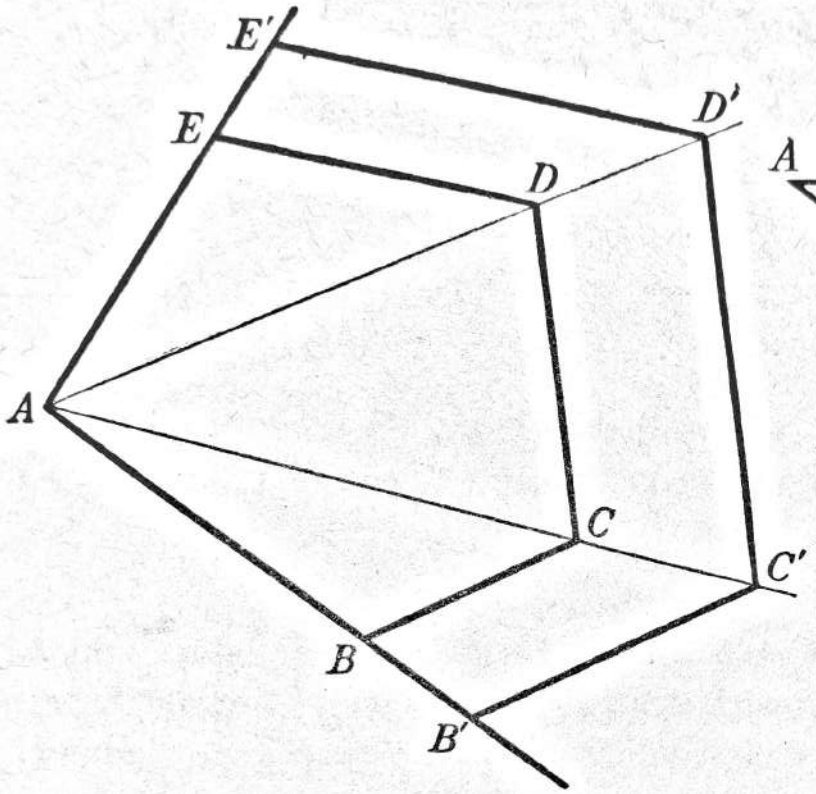
Na rys. 47 czworokąt $A'B'C'D'$ jest figurą wprost jednokładną do czworokąta $ABCD$. Na rys. 48 czworokąt $A''B''C''D''$ jest figurą odwrotnie jednokładną do czworokąta $ABCD$.

Rys. 48 został sporządzony podobnie jak rys. 47. Różnica polega na tym, że odcinek SA'', większy $3\frac{1}{2}$ razy od odcinka SA, odłożonego nie na półprostej SA, lecz na jej przedłużeniu poza punkt S.

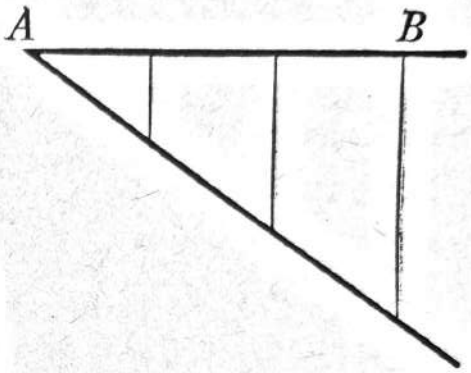
Przykład 2. Narysować figurę jednokładną (wprost) do danego pięciokąta $ABCDE$ w stosunku $\frac{4}{3}$. Jako środek jednokładności przyjąć wierzchołek A.

Rozwiązanie. Dany jest pięciokąt $ABCDE$; jako środek jednokładności obieramy punkt A (rys. 49a). Kreślimy półproste AB, AC,

AD i AE. Na półprostej AB odkładamy odcinek AB' równy $\frac{4}{3}$ boku AB*). Przez punkt B' kreślimy prostą równoległą do boku BC, otrzymując w przecięciu z półprostą AC punkt C'; przez punkt C' prowadzimy prostą równoległą do boku CD, itd.



Rys. 49a



Rys. 49b

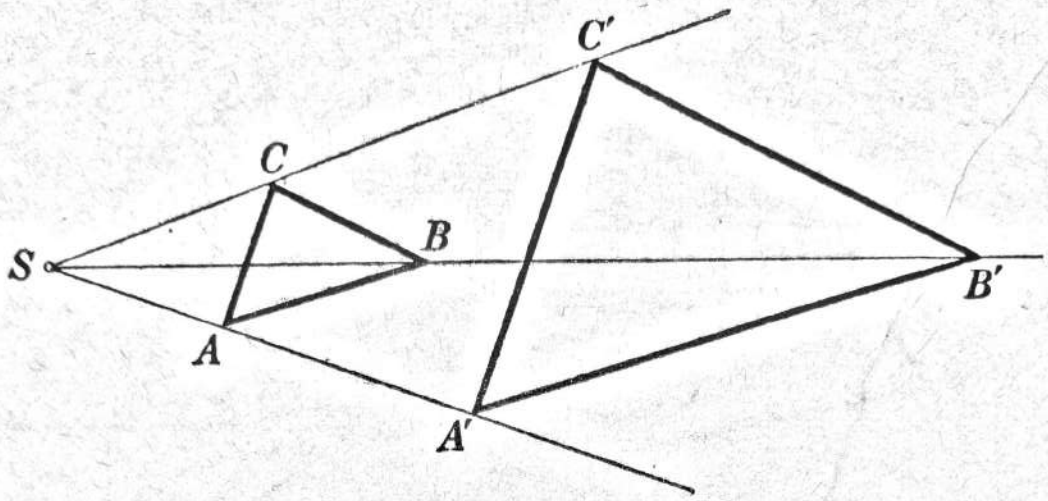
Pięciokąt $AB'C'D'E'$ jest wprost jednokładny do pięciokąta $ABCDE$ w stosunku $\frac{4}{3}$.

Przykład 3. Narysować figurę jednokładną (wprost) do trójkąta ABC w ten sposób, żeby punktem odpowiednim do wierzchołka A był dany punkt A'.

Rozwiązanie. Dany jest trójkąt ABC i punkt A' (rys. 50). Kreślimy prostą przez punkty A i A'. Środek jednokładności S musimy obrać na tej prostej na zewnątrz odcinka AA'. Kreślimy jeszcze półproste SB i SC, następnie przez punkt A' prowadzimy prostą równoległą do boku AB itd.

---

*) Podział odcinka AB na trzy równe części przypomniano na rys. 49b.



Rys. 50

Trójkąt $A'B'C'$ jest wprost jednokładny do trójkąta ABC.

Sprawdźcie, jaką figurę otrzymamy, obierając punkt S na odcinku AA'.

Z powyższych rozważań widać, że za pomocą jednokładności możemy każdą figurę powiększyć lub zmniejszyć w dowolnym stosunku. Na tym polega wielkie znaczenie praktyczne jednokładności.

Pytania

1. W jaki sposób rysujemy figurę wprost jednokładną do danej figury?
2. W jaki sposób rysujemy figurę odwrotnie jednokładną do danej figury?
3. Co to jest stosunek jednokładności? Jaki trzeba przyjąć stosunek jednokładności, jeśli chcemy daną figurę powiększyć, a jaki — gdy chcemy daną figurę zmniejszyć?
4. Co wiemy o odpowiednich odcinkach figur jednokładnych?

Zadania

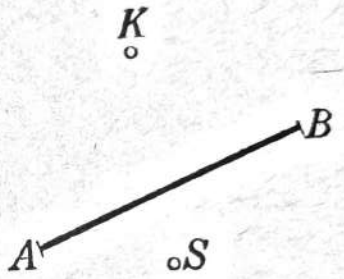
1. Narysujcie czworokąt $ABCD$ (dość duży) i obierzcie środek jednokładności S wewnątrz czworokąta.

a) Wykreślcie czworokąt wprost jednokładny do czworokąta $ABCD$ względem środka S, biorąc stosunek jednokładności równy $\frac{2}{3}$.

b) Wykreślcie czworokąt odwrotnie jednokładny do czworokąta $ABCD$ względem środka S w stosunku $\frac{1}{3}$.

2. Dany jest odcinek AB oraz punkty S i K, jak na rys. 51. Narysujcie odcinek jednokładny do odcinka AB względem środka S i przechodzący przez punkt K.

3. Dany jest odcinek AB oraz punkt A' nie leżący na prostej AB. Narysujcie odcinek wprost jednokładny do odcinka AB w ten sposób, żeby punktowi A odpowiadał punkt A' i żeby stosunek jednokładności był równy 2.



Rys. 51

4. Dany jest trójkąt ABC i punkt A' leżący na zewnątrz trójkąta. Narysujcie figurę wprost jednokładną do trójkąta ABC w ten sposób, żeby wierzchołkowi A odpowiadał punkt A' i żeby stosunek jednokładności wynosił $\frac{1}{2}$.

LEKCJA 41

Własności figur jednokładnych. Jednokładność jako przekształcenie

W poprzedniej lekcji zapoznaliśmy się z figurami jednokładnymi. Nauczyliśmy się konstruować takie figury, przy czym poznaliśmy ważną ich własność; odcinki odpowiednie figur jednokładnych są równoległe. W lekcji dzisiejszej omówimy inne własności figur jednokładnych.

Popatrzmy na rys. 46 z lekcji poprzedniej zwracając uwagę na kąty: $\sphericalangle BAE$ i $\sphericalangle B'A'E'$. Obydwa te kąty są ostre, ich odpowiednie ramiona są równoległe. Takie kąty — jak wiemy z klasy VIII —

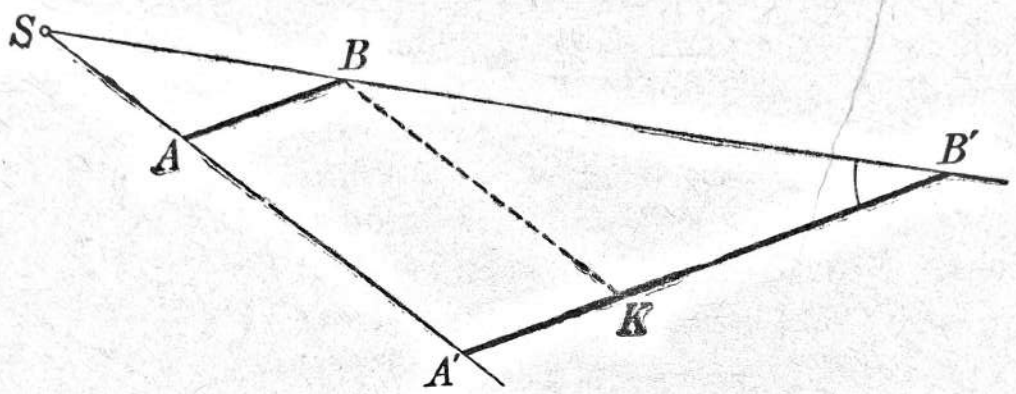
są równe*). Podobnie: $\sphericalangle AED = \sphericalangle A'E'D'$, $\sphericalangle EDC = \sphericalangle E'D'C'$, itd. Zatem:

Odpowiednie kąty figur jednokładnych są równe.

Wykażemy teraz, że:

Stosunek odpowiednich odcinków figur jednokładnych jest równy stosunkowi jednokładności.

W tym celu wykreślmy fragment rysunku 46 (rys. 53).



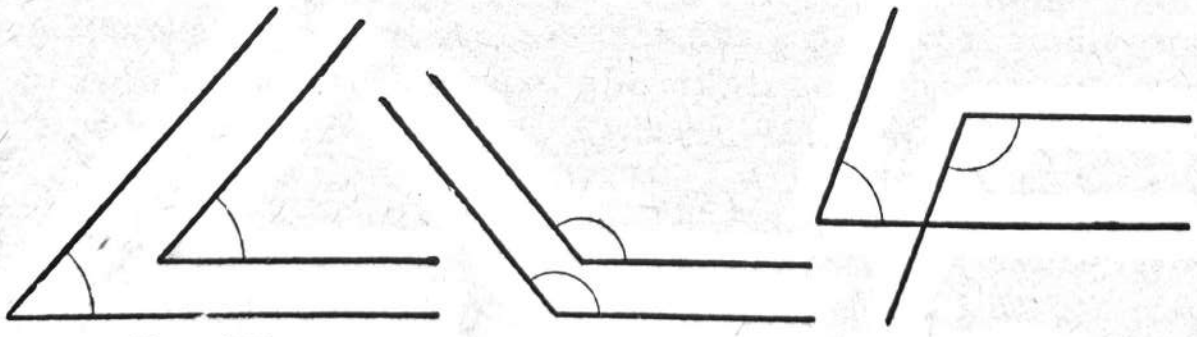
Rys. 53

Następnie przez punkt B narysujmy prostą BK równoległą do SA'. Otrzymamy wówczas odcinek $A'K$ równy odcinkowi AB.

Teraz patrząc na rys. 53 dostrzeżemy rzecz następującą: Mamy tam kąt $SB'A'$ (zaznaczony łukiem), przy czym jego ramiona są przecięte prostymi równoległymi BK i SA'. Traktując w ten sposób rys. 53, zastosujmy do niego twierdzenie Talesa w tej jego odmianie, którą przedstawia proporcja (3) ze str. 124. Otrzymamy proporcję

$$\frac{B'A'}{KA'} = \frac{B'S}{BS}$$

*) Przypominamy to twierdzenie: Dwa kąty o ramionach odpowiednio równoległych są równe (jeżeli obydwa są ostre lub obydwa rozwarte), albo w sumie dają 180^0 (jeżeli jeden jest ostry, a drugi rozwarty).



Rys. 052a Rys. 052b Rys. 052c

którą — uwzględniając równość $KA' = AB$ — możemy napisać w postaci

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{SB'}{SB}$$

Lecz $\frac{A'B'}{AB}$ jest stosunkiem odpowiednich odcinków dwóch figur jednokładnych (o środku jednokładności S), a $\frac{SB'}{SB}$ jest stosunkiem jednokładności, zatem istotnie stosunek odpowiednich odcinków figur jednokładnych jest równy stosunkowi jednokładności, c. b. d. o.

Twierdzenie to udowodniliśmy dla odcinków $A'B'$ i AB (rys. 46), ale jest ono prawdziwe również i dla innych odpowiednich odcinków figur F' i F. Oznaczając przez k stosunek jednokładności, mamy więc równości

$$\frac{A'B'}{AB} = k, \quad \frac{B'C'}{BC} = k, \quad \ldots \quad \frac{A'D'}{AD} = k, \quad \ldots$$

z których wynika zależność

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \ldots = \frac{A'D'}{AD}$$

Wyrażając tę zależność słowami, powiemy:

Jeśli dwie figury są jednokładne, to odcinki jednej figury są proporcjonalne do odpowiednich odcinków drugiej figury.

Uwaga. Jeśli w proporcji

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

przestawimy wyrazy środkowe (co jest dopuszczalne, gdyż przez to iloczyn wyrazów środkowych nie ulegnie zmianie), to otrzymamy proporcję

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$$

która mówi nam, że stosunek dwóch odcinków na jednej z dwóch figur jednokładnych równa się stosunkowi odpowiednich odcinków na drugiej z tych figur.

W szczególności, jeżeli jakieś dwa odcinki jednej figury są równe, to odpowiadające im odcinki figury jednokładnej też są równe.

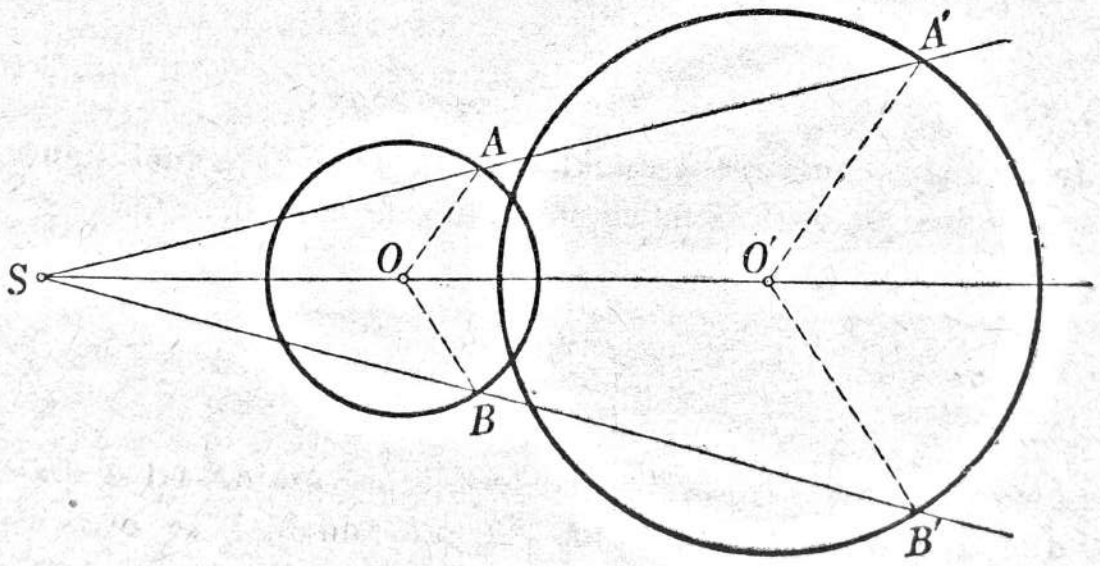
Jednokładność jako przekształcenie

Gdy kreślimy figurę jednokładną do figury danej, wówczas z tej figury otrzymujemy nową figurę. Powiadamy, że — wykonując taką konstrukcję — **przekształcamy daną figurę przez jednokładność**.

Jednokładność jest więc przekształceniem geometrycznym. Przypominamy, że w klasie VIII poznaliście inne przekształcenia geometryczne. Rysując figury symetryczne do danych, przesuwając te figury równolegle, obracając je — przekształcaliście figury przez symetrię, przez przesunięcie lub przez obrót.

Zadanie. Przekształcić dane koło przez jednokładność prostą o stosunku 2.

Rozwiązanie. Dane jest koło o środku O. Jako środek jednokładności przyjmujemy punkt S (rys. 54).



Rys. 54

Na okręgu danego koła obieramy dowolny punkt A, rysujemy półproste SO i SA, po czym na półprostej SO odkładamy odcinek SO' dwa razy większy od odcinka SO, a na półprostej SA odkładamy odcinek SA' dwa razy większy od odcinka SA.

Następnie rozumujemy tak: Wszystkie promienie koła danego są równe

$$OA = OB \ldots$$

przeto również odcinki do nich jednokładne: $O'A'$, $O'B'$ itd. są równe i wyznaczają koło o środku O' i promieniu $O'A'$

Rysujemy więc to koło i zadanie jest rozwiązane.

Jak widzimy, figurą jednokładną do koła jest koło.

Z lekcji tej trzeba koniecznie zapamiętać następujące własności figur jednokładnych:

1. Odpowiednie odcinki figur jednokładnych są równoległe.
2. Odcinki jednej z dwóch figur jednokładnych są proporcjonalne do odpowiednich odcinków drugiej figury.
3. Odpowiednie kąty figur jednokładnych są równe.

Pytania

1. Co wiemy o odpowiednich odcinkach figur jednokładnych?
2. Zapiszcie w postaci wzoru proporcjonalność odpowiednich odcinków z rys. 46 z lekcji poprzedniej. Weźcie przy tym pod uwagę nie tylko boki, lecz również przekątne pięciokątów.
3. Co wiemy o odpowiednich kątach figur jednokładnych? Które kąty na rys. 46 są równe?
4. Jaką figurę otrzymamy, gdy przekształcimy przez jednokładność: a) trójkąt równoboczny, b) prostokąt, c) romb?

Zadania

1. Przekształcić dane koło przez jednokładność odwrotną o stosunku $\frac{1}{2}$. Środek jednokładności przyjąć wewnątrz koła.

2. Dana jest figura utworzona przez półokrąg i średnicę łączącą końce tego półokręgu. Przekształcić tę figurę przez jednokładność prostą o stosunku $\frac{3}{2}$. Środek jednokładności obrać na półokręgu.

3. Dany jest okrąg o środku O i punkt K' wewnątrz okręgu. Narysować okrąg jednokładny do danego i przechodzący przez punkt K'. Środek jednokładności S obrać na danym okręgu.

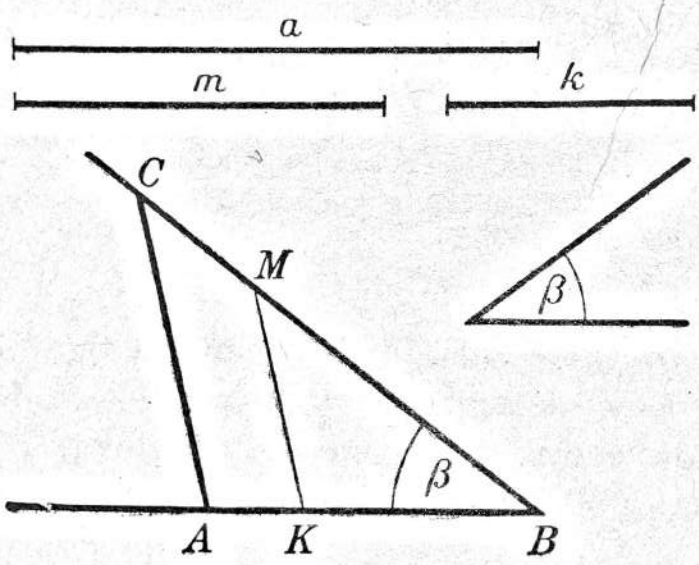
LEKCJA 42

Zastosowania jednokładności

Przekształcenia jednokładne ogromnie ułatwiają rozwiązanie niektórych zadań konstrukcyjnych. Pokażemy to na przykładach.

Zadanie 1. Zbudować trójkąt ABC, mając dane: bok $BC = a$ i kąt $ABC = \beta$ oraz wiedząc, że boki BC i AB są proporcjonalne do dwóch danych odcinków m i k.

Rozwiązanie



Rys. 55

Budujemy trójkąt KBM o bokach m i k i kącie między nimi zawartym β (rys. 55). Następnie uważając punkt B za środek jednokładności budujemy $\triangle ABC$ jednokładny do $\triangle KBM$ w ten sposób, że na półprostej BM odkładamy odcinek $BC = a$, po czym przez punkt C kreślimy równoległą do MK.

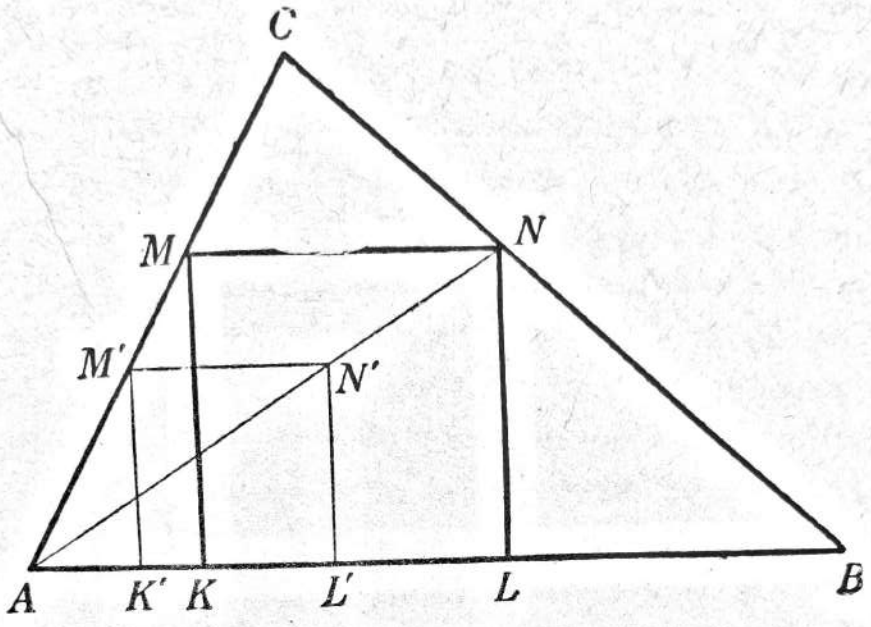
Z jednokładności trójkątów $\triangle KBM$ i $\triangle ABC$ wynika, że odpowiednie ich boki są proporcjonalne, czyli że

$BC:m = AB:k$, jak być powinno.

Zadanie 2. W dany trójkąt ABC wpisać kwadrat $KLMN$. Wierzchołki K i L mają leżeć na boku AB, a wierzchołki M i N odpowiednio na bokach AC i BC trójkąta.

Rozwiązanie. Rysujemy dany trójkąt ABC oraz kwadrat $K'L'M'N'$ o dowolnym boku jak na rys. 56. Przez punkty A i N' kreślimy prostą, która przecina bok BC trójkąta w punkcie N.

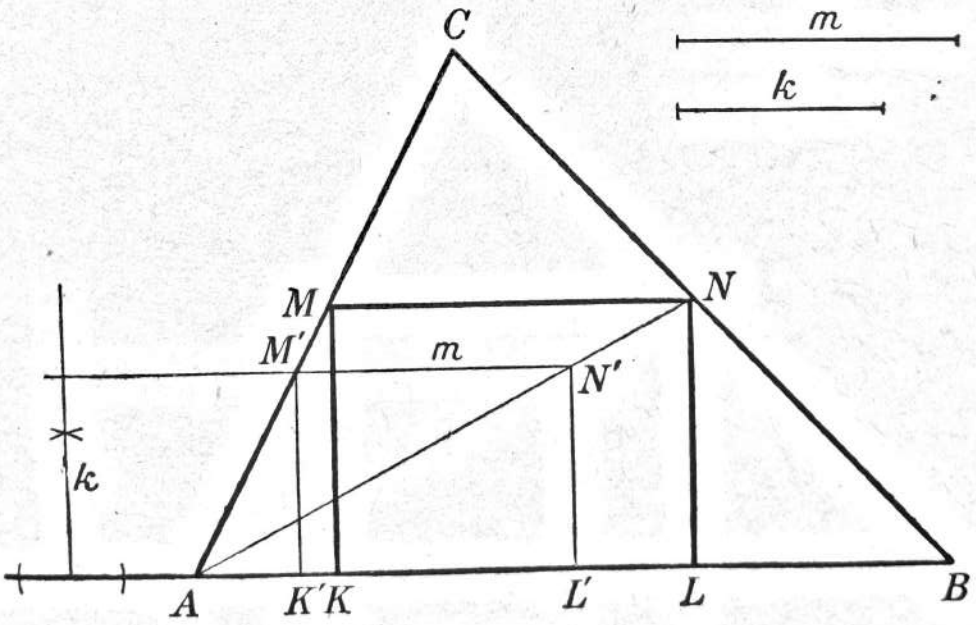
Następnie, obierając punkt A za środek jednokładności, kreślimy kwadrat $KLMN$ jednokładny do kwadratu $K'L'M'N'$ przy założeniu, że punktowi N' odpowiada punkt N.



Rys. 56

Zadanie 3. W dany trójkąt wpisać prostokąt o bokach proporcjonalnych do dwóch danych odcinków m i k.

Rozwiązanie. Dany jest trójkąt ABC i dwa odcinki m i k.



Rys. 57

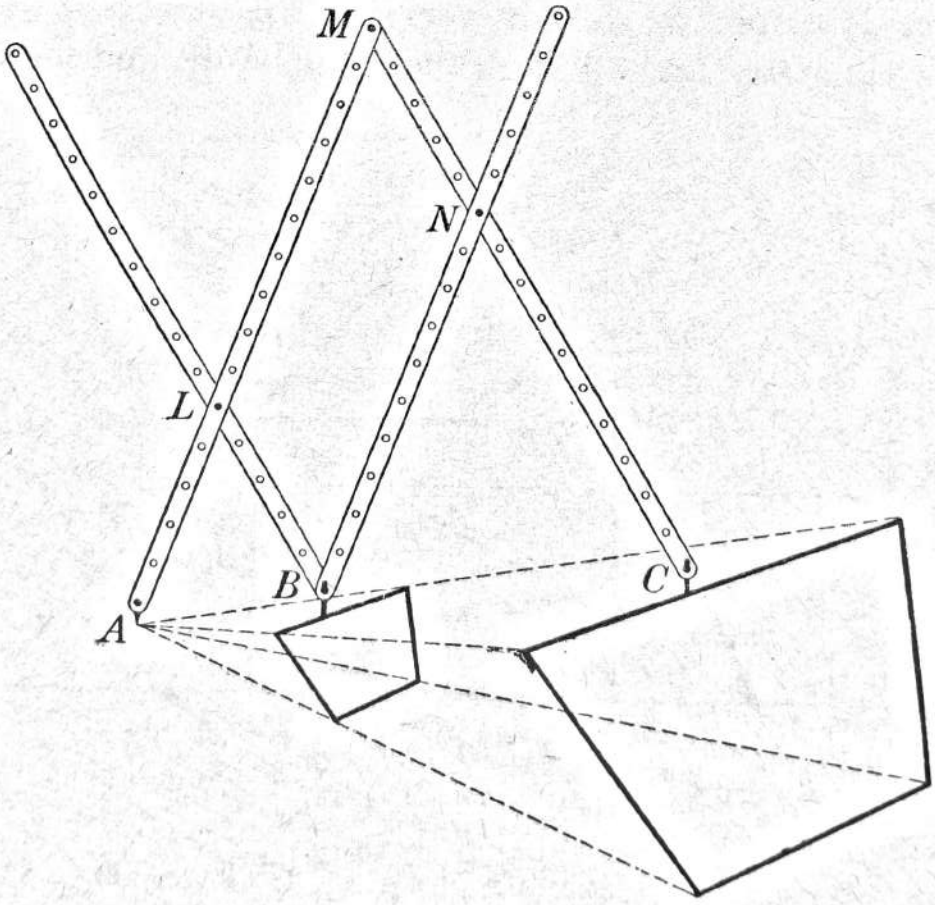
Konstrukcja jest pokazana na rys. 57. Wykonajcie ją samodzielnie.

Uwaga. Zauważcie, że we wszystkich powyższych zadaniach zamiast właściwej figury F rysowaliśmy najpierw łatwiejszą do zbudowania figurę F' jednokładną do danej figury F względem jakiegoś znanego środka.

Do szybkiego rysowania figur jednokładnych służy przyrząd zwany pantografem. Zasadę działania tego przyrządu pokazuje rys. 58.

Widzimy tam cztery listewki, podziurkowane w równych odstępach. Listewki są połączone za pomocą sztyfcików L, M, N i ostrza B. Połączenia M i B są stałe, połączenia L i N mogą być dowolnie zmieniane (sztyfciki L i N można przestawiać wzdłuż listewek). W otworze A znajduje się ostrze, w otworze C umieszczamy ołówek.

Mając powiększyć jakąś figurę, kładziemy pantograf na arkuszu, przyciskamy ostrze A do papieru, a ostrzem B obwodzimy daną figurę; wówczas ołówek C kreśli figurę jednokładną do danej figury, przy czym środkiem jednokładności jest punkt A. Stosunek jednokładności równa się stosunkowi odległości AM do odległości AL. Na rys. 58 stosunek ten wynosi 3:1.



Rys. 58

Chcąc jakąś figurę zmniejszyć, umieszczamy ołówek w B, ostrze zaś w C.

Zadania

1. Zbudować $\triangle ABC$ mając dany bok $BC = a$ oraz przyjmując warunek, że boki BC, AC i AB mają być proporcjonalne do trzech danych odcinków m, k i p.

2. W dany trójkąt wpisać równoległobok o danym kącie ostrym α i bokach proporcjonalnych do dwóch odcinków k i l.

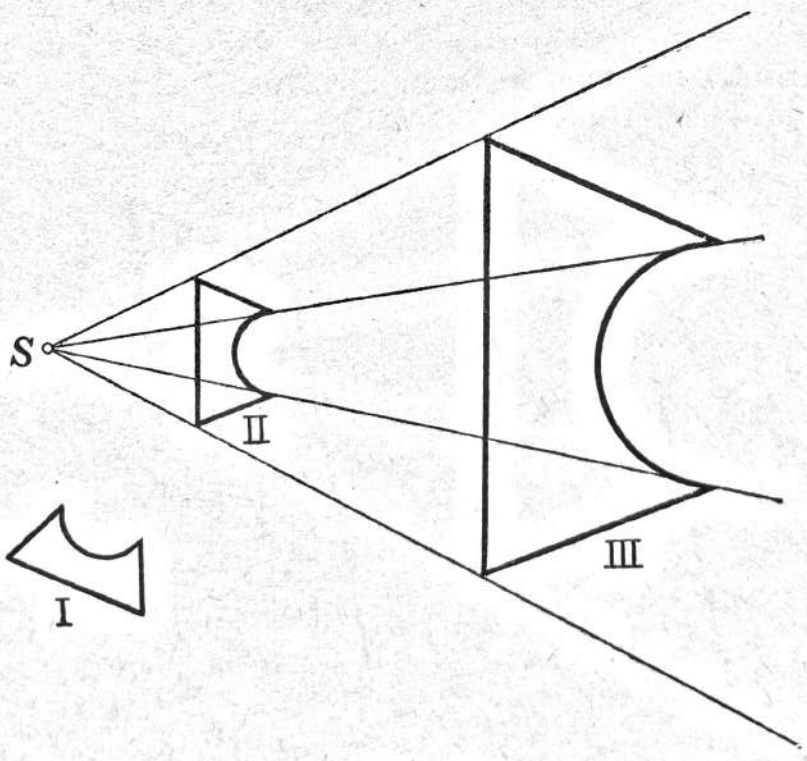
3. W półkole o średnicy AB wpisać kwadrat tak, żeby dwa jego wierzchołki leżały na AB.

*4. W dany trójkąt ABC wpisać romb tak, żeby jeden jego bok leżał na AB, a jedna przekątna była równoległa do AC.

LEKCJA 43

Figury podobne

Po zapoznaniu się z figurami jednokładnymi przystępujemy obecnie do omówienia figur podobnych. Tematowi temu poświęcimy 8 lekcyj.



Rys. 59

Przyjrzyjmy się rysunkowi 59. Został on sporządzony w ten sposób, że najpierw narysowano figurę I, następnie figurę tę przeniesiono*) w położenie II, wreszcie figurę II przekształcono przez jednokładność w figurę III.

Powiadamy, że figurę I przekształciliśmy w figurę III przez przeniesienie i jednokładność. O figurach I i III mówimy, że są podobne. Za podobne uważamy również figury II i III, a także figury I i II.

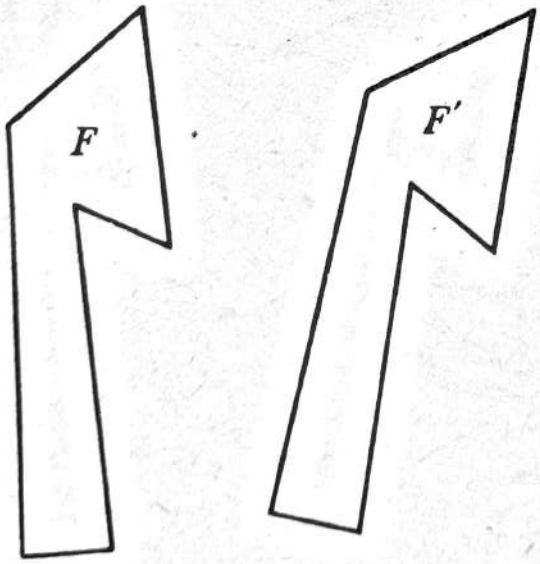
Powyższy przykład nasuwa następujące określenie figur podobnych.

---

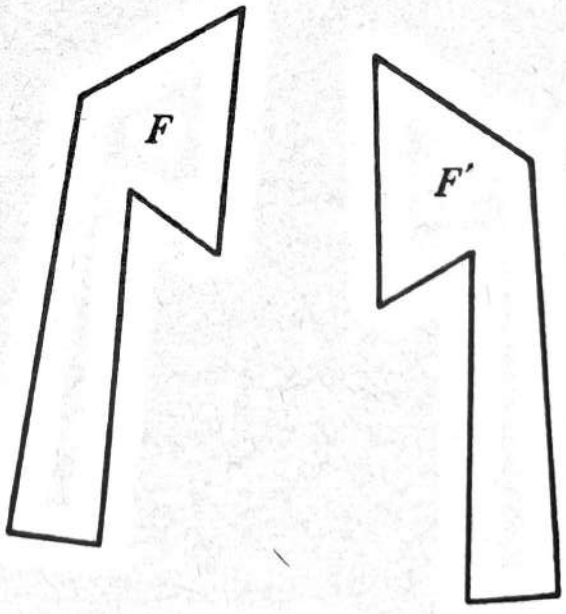
*) Przypominamy wiadomości z klasy VIII o przenoszeniu figur. Niech będzie dana na płaszczyźnie figura F (rys. 059a). Kładziemy na płaszczyznę kartkę papieru przezroczystego, zaznaczamy na niej figurę F, następnie przenosimy kartkę do innego położenia (na tej samej płaszczyźnie) i w tym nowym położeniu przekalkowujemy figurę F. Otrzymujemy figurę F'. W geometrii bierzemy pod uwagę dwa następujące sposoby przeniesienia kartki do nowego położenia:

Sposób pierwszy. Przesuwamy kartkę po płaszczyźnie nie odrywając jej od płaszczyzny. Wówczas o figurze F' mówimy, że powstała z figury F przez przesunięcie po płaszczyźnie (rys. 059a).

Sposób drugi. Odrywamy kartkę od płaszczyzny, odwracamy ją na drugą stronę, po czym przesuwamy ją po płaszczyźnie do nowego położenia. W tym przypadku mówimy, że figura F' powstała z figury F przez przesunięcie i odwrócenie (rys. 059b).



Rys. 059a



Rys. 059b

OKREŚLENIE. **Dwie figury płaskie są podobne, jeżeli jedną można otrzymać z drugiej przez przeniesienie lub przez jednokładność, lub przez łączne zastosowanie obu tych przekształceń.**

Przeanalizujcie starannie to określenie i postarajcie się dobrze je zrozumieć i przyswoić.

Wówczas z łatwością stwierdzicie, że prawdziwe są następujące zdania:

1. Dwie figury przystające są podobne (gdyż jedna z nich może być otrzymana z drugiej przez przeniesienie, np. figury I i II na rys. 59).

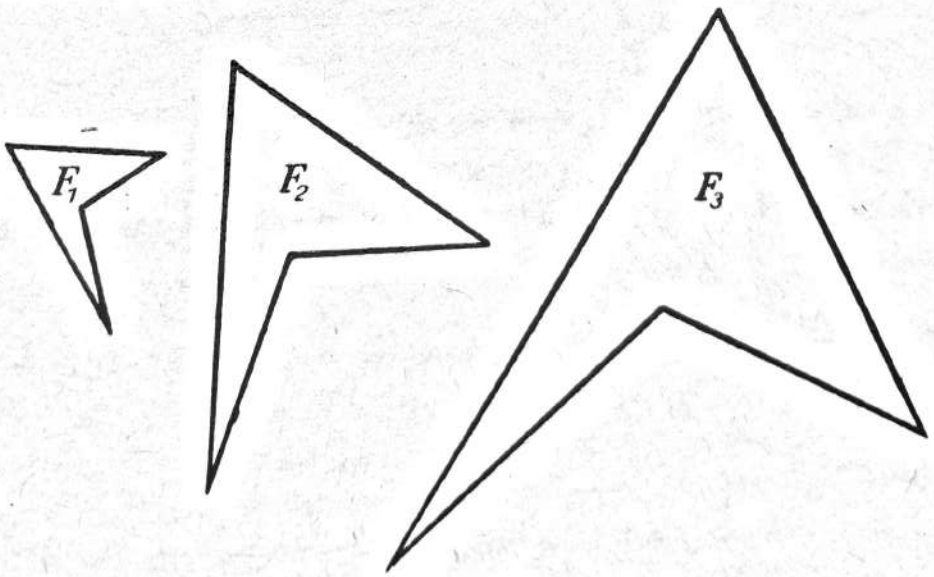
2. Dwie figury jednokładne są podobne (gdyż jedna z nich może być otrzymana z drugiej przez jednokładność, np. figury II i III na rys. 59).

3. Jeśli figura I jest przystająca do figury II, a figura II jest jednokładna do figury III, to figury I i III są podobne (gdyż figura III może być otrzymana z figury II przez przeniesienie i przez jednokładność, jak na rysunku 59).

4. Jeśli figura F_1 jest podobna do figury F_2, a figura F_2 jest podobna do figury F_3, to figury F_1 i F_3 są podobne (gdyż stosując wspomniane przekształcenia możemy najpierw z figury F_1 otrzymać figurę F_2, a następnie w podobny sposób z figury F_2 otrzymać figurę F_3 — rys. 59a).

Zdanie 4 można wypowiedzieć krócej tak:

4. Dwie figury podobne do trzeciej są podobne.



Rys. 59c

Własności figur podobnych

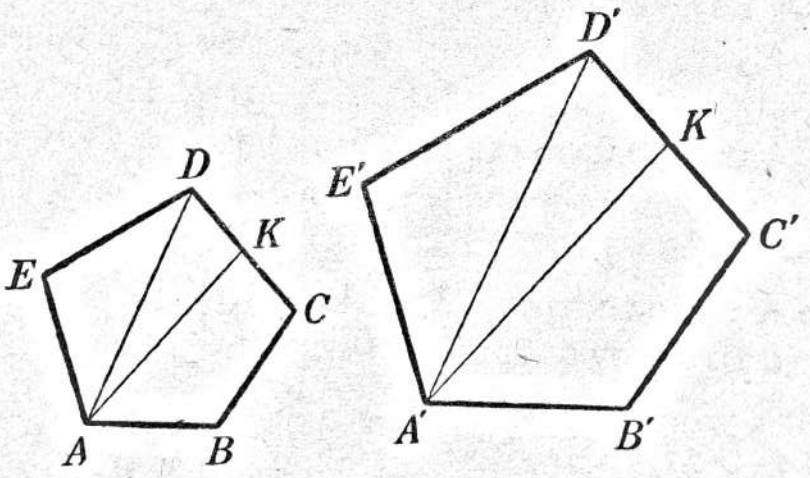
Popatrzmy znowu na rys. 59, lecz z innego nieco punktu widzenia, niż poprzednio. Dajmy na to, że narysowaliśmy dwie figury jednokładne II i III, a następnie figurze II nadaliśmy położenie I. Pytamy: które własności figur jednokładnych (patrzcie str. 209) zachowuje para figur I i III?

Z rysunku 59 widzimy wyraźnie, że równoległość odpowiednich odcinków została utracona, ale zachowana została równość stosunków odpowiednich odcinków i równość odpowiednich kątów. Zapamiętajmy to dobrze:

W figurach podobnych:

1. Kąty odpowiednie są równe.

2. Odcinki jednej figury są proporcjonalne do odpowiednich odcinków drugiej figury.



Rys. 60

Przykład 1. Rys. 60 przedstawia dwa pięciokąty podobne. W tych pięciokątach:

$$\sphericalangle A' = \sphericalangle A, \quad \sphericalangle B' = \sphericalangle B, \quad \sphericalangle C' = \sphericalangle C \text{ itd.}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \ldots = \frac{A'D'}{AD} = \ldots$$

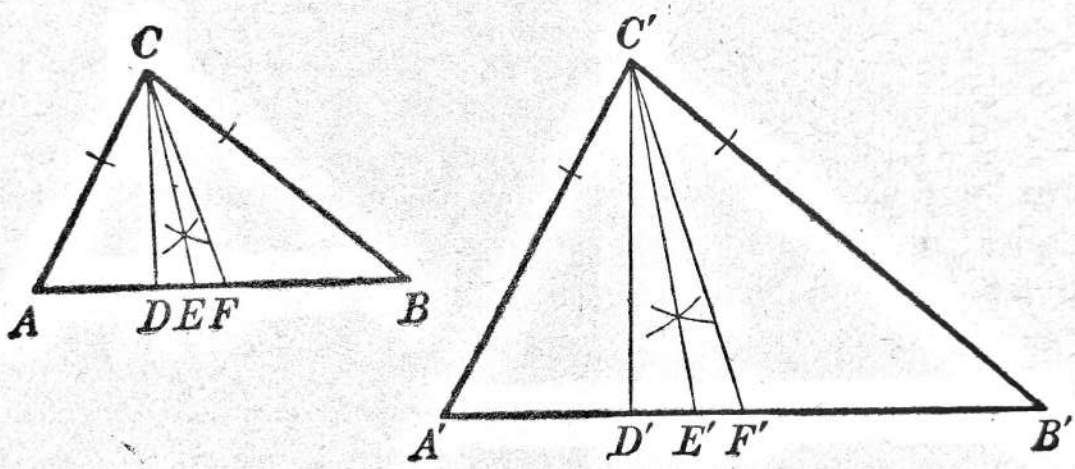
Podkreślamy, że odcinkami odpowiednimi w wielokątach podobnych są nie tylko boki. Odcinkami odpowiednimi są również

przekątne (AD i $A'D'$ itd), a także odcinki AK i AK' łączące wierzchołki A i A' ze środkami boków DC i $D'C'$ itp.

OKREŚLENIE. Jeśli mamy dwie figury podobne F_1 i F_2, to skalą podobieństwa figury F_2 do figury F_1 nazywamy stosunek którегokolwiek odcinka figury F_2 do odpowiedniego odcinka figury F_1.

Na rys. 60 stosunek ten wynosi 3:2. Skala podobieństwa figury III do figury I na rys. 59 wynosi 3:1.

Przykład 2. Na rys. 61 widzimy dwa trójkąty podobne. W trójkątach wykreślono wysokości CD i $C'D'$, dwusieczne CE i $C'E'$ oraz środkowe CF i $C'F'$.



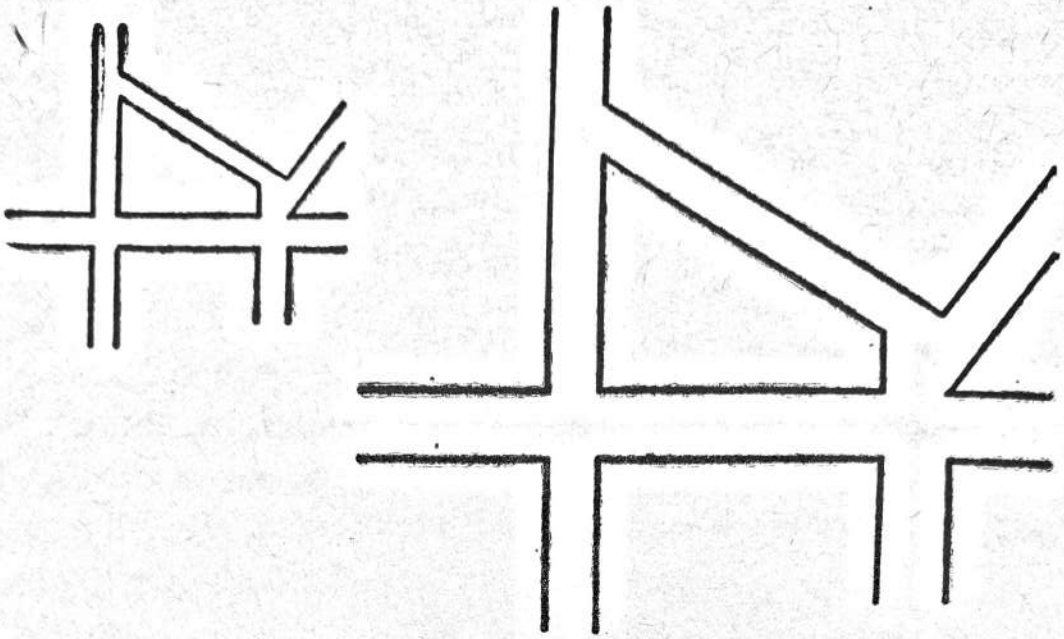
Rys. 61

Są to pary odcinków odpowiednich. Mamy więc zależność

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{C'E'}{CE} = \frac{C'F'}{CF} = \frac{A'B'}{AB} = \dots$$

Można by przytoczyć jeszcze wiele innych przykładów figur podobnych. Figurami podobnymi są np. dwa plany tej samej miejscowości sporządzone w różnej skali (rys. 62), różnej wielkości fotografie tego samego obiektu itp.

Uwaga. W życiu codziennym mówimy nieraz, że jakieś dwa przedmioty są podobne. Słowo „podobny" w mowie potocznej nie zawsze jednak oznacza to samo, co w geometrii. Tak np. mówi się, że fotografia jest podobna do osoby sfotografowanej, gdy tymczasem w znaczeniu geometrycznym fotografia nie jest podobna do żadnej



Rys. 62

osoby z tego chociażby względu, że jest płaska (dwuwymiarowa), a człowiek jest tworem przestrzennym.

Symbolem podobieństwa geometrycznego jest znak $\sim$. Chcąc np. zanotować, że figura F jest podobna do figury F', piszemy:

$$\text{figura } F \sim \text{figura } F'$$

Pytania

1. Jakie dwie figury nazywamy podobnymi?
2. Jakie własności mają figury podobne?
3. Co nazywamy skalą podobieństwa?
4. Jaka jest skala podobieństwa figur przystających?

Zadania

1. Wykażcie rysując odpowiednie figury, że nieprawdziwe są twierdzenia:

a) *„Jeżeli kąty jednego trapezu są równe odpowiednim kątom drugiego trapezu, to te trapezy są podobne"*.

b) *„Jeżeli dwa równoległoboki mają boki odpowiednio proporcjonalne, to są podobne"*.

2. Boki trójkąta mają długości 7 cm, 8 cm, 10 cm. Obliczyć boki trójkąta podobnego, którego największy bok wynosi 7 cm.

3. Stosunek boków danego czworokąta wynosi 3:4:5:8. Obliczyć boki czworokąta podobnego, którego obwód równa się 50 cm.

4. Dany jest trójkąt ABC. Zbudować trójkąt $A'B'C'$ podobny do trójkąta ABC w skali $\frac{2}{3}$.

Odpowiedzi

2. 4,9 cm; 5,6 cm. **3.** 7,5 cm; 10 cm; 12,5 cm; 20 cm. Wskazówka: Boki czworokąta podobnego oznaczyć przez: $3x$, $4x$, $5x$, $8x$.

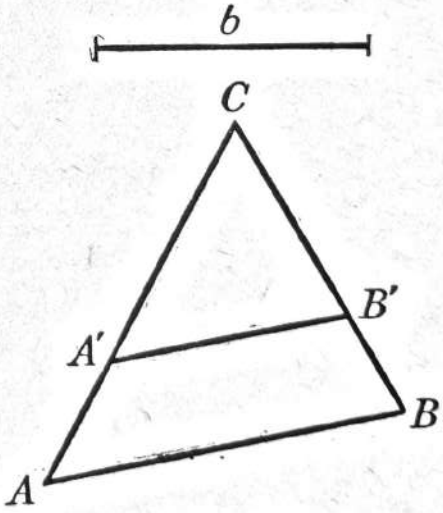
LEKCJE 44 i 45

Pierwsza cecha podobieństwa trójkątów

W przyszłości wypadnie nam nieraz sprawdzać podobieństwo figur, a w szczególności trójkątów. Nie będziemy musieli wykazywać wówczas za każdym razem, czy jeden z tych trójkątów da się przekształcić w drugi przez przeniesienie lub jednokładność. Poznamy bowiem trzy twierdzenia, zwane cechami podobieństwa trójkątów, które nam to sprawdzanie ułatwią.

Ażeby dowody tych twierdzeń stały się zrozumialsze, rozwiążmy następujące proste zadanie z działu o jednokładności.

Zadanie. Dany jest trójkąt ABC. Obierając wierzołek C za środek jednokładności, narysować trójkąt $A'B'C$ jednokładny wprost do $\triangle ABC$, przy czym bok $A'C$ szukanego trójkąta ma być równy danemu odcinkowi b $(b < AC)$.



Rys. 63

Rozwiązanie. Dany jest odcinek b i trójkąt ABC (rys. 63). Na boku AC od punktu C odkładamy odcinek $CA' = b$, następnie przez A' prowadzimy prostą równoległą do AB i przecinającą bok CB w punkcie B'.

Na mocy twierdzenia Talesa stosunki $\frac{A'C}{AC}$ i $\frac{B'C}{BC}$ są równe, a to oznacza — jak wiemy z lekcji 39 i 40 — że trójkąty ABC i $A'B'C$ są jednokładne.

Przechodzimy teraz do właściwego tematu.

TWIERDZENIE I. **(Pierwsza cecha podobieństwa trójkątów). Dwa trójkąty są podobne, jeżeli kąty jednego z nich są równe odpowiednim kątom drugiego.**

Niech będą dane dwa trójkąty: $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ (rys. 64).
Założenie: $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$
Teza: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Dowód. Odłóżmy na boku $A'C'$ poczynając od wierzchołka C' odcinek $C'D$ równy bokowi AC i poprowadźmy przez D prostą DE równoległą do boku $A'B'$.

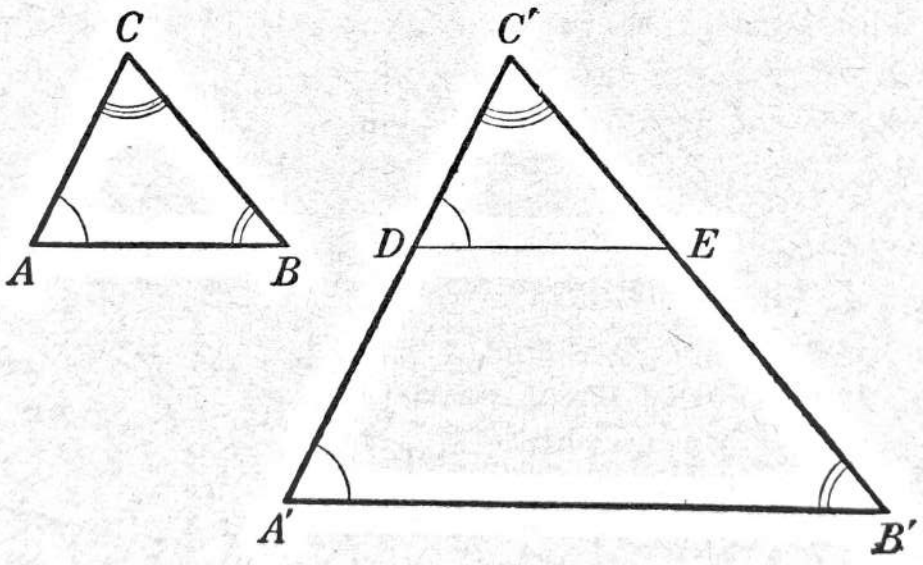
Powstanie trójkąt DEC', który — jak łatwo dostrzec — jest przystający do trójkąta ABC na podstawie III cechy przystawania trójkątów. Istotnie mamy tu:

$$DC' = AC \text{ (z odłożenia)}$$
$$\sphericalangle C' = \sphericalangle C \text{ (z założenia)}$$
$$\sphericalangle D = \sphericalangle A' = \sphericalangle A$$

($\sphericalangle D$ i $\sphericalangle A'$ są to kąty odpowiadające przy prostych równoległych DE i $A'B'$ przeciętych sieczną $A'C'$; $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$ z założenia).

Zanotujmy więc:

$$\triangle ABC = \triangle DEC'$$



Rys. 64

Z drugiej strony, patrząc na rys. 64 widzimy wyraźnie, że $\triangle DEC'$ jest jednokładny do $\triangle A'B'C'$, przy czym środkiem jednokładności jest wierzchołek C'.

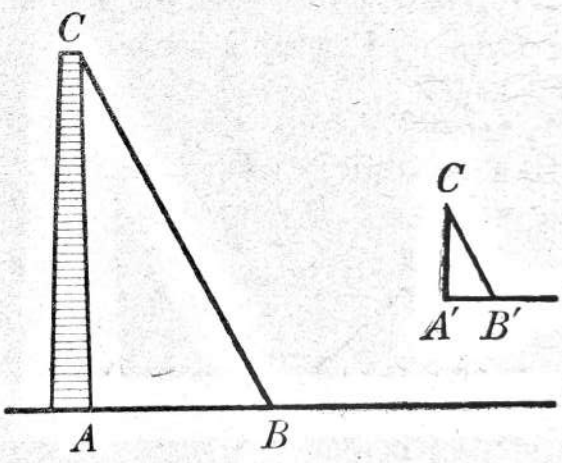
Okazuje się, że trójkąt ABC jest przystający do trójkąta DEC', a trójkąt DEC' jest jednokładny do trójkąta $A'B'C'$. Zgodnie z określeniem figur podobnych (str. 215, zdanie 3) oznacza to, że trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ są podobne

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Uwaga 1. Aby stwierdzić podobieństwo dwóch trójkątów, wystarczy wykazać, że dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta, gdyż wtedy i trzecie kąty są równe.

Uwaga 2. Jeśli trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ są podobne, to odpowiednie boki i w ogóle odpowiednie odcinki tych trójkątów są proporcjonalne.

Przykład 1. Komin fabryczny rzuca cień długości 20 m, jednocześnie cień pionowego palika, wystającego z ziemi na wysokość 1,8 m, ma długość 120 cm. Obliczyć wysokość komina.



Rys. 65

Rozwiązanie. Zakładając, że promienie słońca padające na niewielką powierzchnię są równoległe, możemy zrobić następujący rysunek (rys. 65):

AC i $A'C'$ oznaczają wysokości komina i palika, AB i $A'B'$ — długości cieni komina i palika, BC i $B'C'$ — kierunek promieni słonecznych.

Dane liczbowe: $A'C' = 1{,}8$ m, $AB = 20$ m, $A'B' = 120$ cm.

Trzeba obliczyć $AC = x$.

Rozpatrujemy trójkąty ABC i $A'B'C'$. Są one podobne na podstawie I cechy podobieństwa trójkątów, gdyż:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A' \text{ (jako kąty proste)}$$

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle B = \sphericalangle B' \\ \sphericalangle C = \sphericalangle C' \end{aligned}\right\} \text{(jako kąty o ramionach odpowiednio równoległych)}$$

Z podobieństwa trójkątów wynika proporcjonalność odpowiednich boków, możemy więc napisać proporcję

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

z której po podstawieniu danych liczb oraz litery x otrzymujemy kolejno

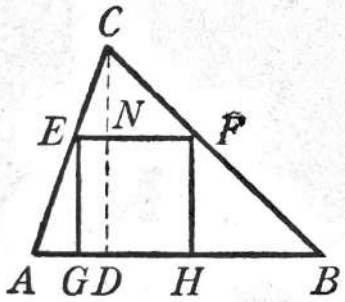
$$\frac{x}{1{,}8} = \frac{20}{1{,}2}$$

$$1{,}2x = 20 \cdot 1{,}8; \qquad x = 30$$

Odpowiedź. Komin ma 30 m wysokości.

Przykład 2. W trójkąt ABC wpisano kwadrat w ten sposób, że dwa jego wierzchołki leżą na boku AB, a przeciwległe wierzchołki na pozostałych bokach trójkąta. Obliczyć bok kwadratu wiedząc, że $AB = 12$ cm, a wysokość $CD = 8$ cm.

Rozwiązanie. Dane (rys. 66): $AB = 12$ cm, $CD = 8$ cm. Trzeba obliczyć $EF = FH = GH = EG = x$.



Rys. 66

Rozpatrujemy dwa trójkąty: $\triangle EFC$ i $\triangle ABC$. Podobieństwo tych trójkątów wynika bezpośrednio z ich jednokładności względem środka C, ale można je również uzasadnić za pomocą I cechy podobieństwa trójkątów (rozpatrzcie odpowiednie kąty w trójkątach EFC i ABC).

W trójkątach podobnych odpowiednie odcinki są proporcjonalne, możemy więc napisać proporcję

$$\frac{CN}{CD} = \frac{EF}{AB}$$

Zauważmy teraz, że $CN = CD - DN = 8 - x$, wobec tego naszej proporcji możemy nadać postać

$$\frac{8-x}{8} = \frac{x}{12}$$

Mnożąc obie strony tej równości przez 24 otrzymujemy równanie

$$3(8-x) = 2x$$

skąd mamy kolejno:

$$24-3x = 2x, \quad 24 = 3x+2x, \quad 24 = 5x, \quad x = 4{,}8$$

Odpowiedź. Bok kwadratu ma długość 4,8 cm.

Pytania

1. Co to są i do czego służą cechy podobieństwa trójkątów?
2. Wypowiedzcie i przeprowadźcie dowód pierwszej cechy podobieństwa trójkątów.

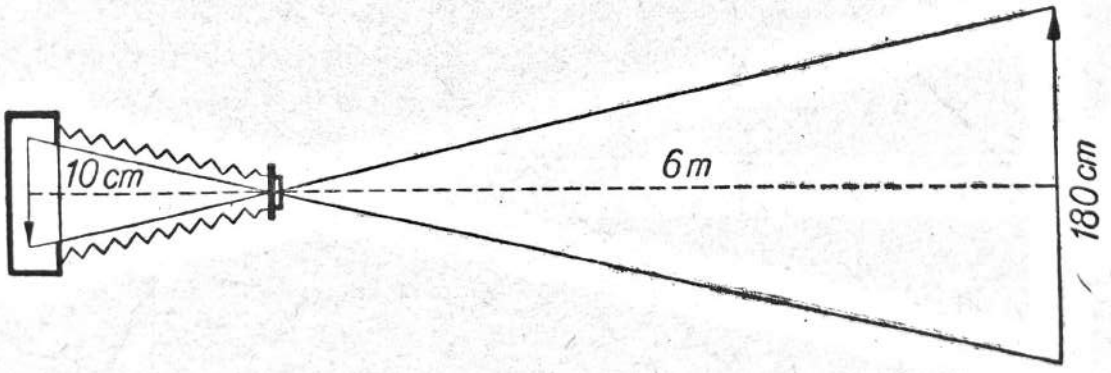
Zadania

1. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \| CD$, przedłużono boki AD i BC aż do przecięcia w punkcie E.

a) Obliczyć DE wiedząc, że $AE = 8{,}8$ cm, $EC = 3{,}5$ cm, $BC = 4{,}2$ cm.

b) Obliczyć DE i EC, jeśli $AB = 10{,}8$ cm, $BC = 5{,}2$ cm, $CD = 7{,}2$ cm, $AD = 6{,}4$ cm.

2. W trójkącie ABC, w którym $AB = 4{,}5$ cm, narysowano odcinek EF równoległy do podstawy AB i odległy od niej o 1,5 cm, przy czym okazało się, że $EF = 2\frac{5}{8}$ cm. Obliczyć wysokość CD trójkąta.



Rys. 67

*3. Jakiej wielkości jest fotografia człowieka, mającego 180 cm wzrostu, zrobiona z odległości 6 m aparatem, w którym odległość między soczewką i kliszą wynosi 10 cm? (rys. 67).

4. W trójkąt ostrokątny o podstawie 4,8 dm i wysokości 2,4 dm wpisano prostokąt w ten sposób, że jeden jego bok leży na podstawie, a przeciwległe wierzchołki na pozostałych bokach trójkąta. Stosunek boków prostokąta wynosi 3:1. Obliczyć te boki.

Odpowiedzi

1. a) 4 cm, b) 12,8 cm, 10,4 cm. **2.** 3,6 cm, **3.** 3 cm. **4.** 2,88 dm i 0,96 dm.

LEKCJA 46

Druga i trzecia cecha podobieństwa trójkątów

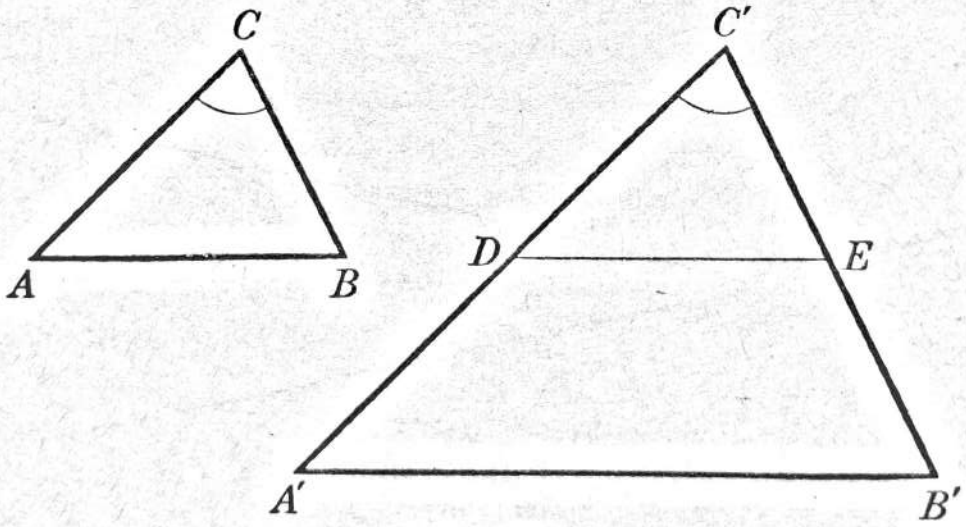
TWIERDZENIE II. **(Druga cecha podobieństwa trójkątów).**

Dwa trójkąty są podobne, jeżeli mają po jednym kącie równym, a boki przylegające do tych kątów są proporcjonalne.

Niech będą dane dwa trójkąty: $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ (rys. 68).

Założenie: $\sphericalangle C' = \sphericalangle C, \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

Teza: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$



Rys. 68

Dowód. Na boku $A'C'$ odkładamy odcinek DC' równy bokowi AC, a na boku $B'C'$ odkładamy odcinek EC' równy bokowi BC.

Rozpatrujemy dwa trójkąty: $\triangle ABC$ i $\triangle DEC'$.
Widzimy, że

$$AC = DC' \quad \text{i} \quad BC = EC' \qquad \text{(z odłożenia)}$$
$$\sphericalangle C = \sphericalangle C' \qquad \text{(z założenia)}$$

Zatem te dwa trójkąty są przystające na podstawie II cechy przystawania trójkątów:

$$\triangle ABC = \triangle DEC'$$

Dalej z założenia wiemy jeszcze, że

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Podstawiając w tej proporcji odcinek DC' zamiast odcinka AC i odcinek EC' zamiast odcinka BC, otrzymujemy proporcję

$$\frac{A'C'}{DC'} = \frac{B'C'}{EC'}$$

która oznacza (patrzcie na rys. 68), że $\triangle DEC'$ jest jednokładny do trójkąta $A'B'C'$ względem środka jednokładności C'.

Wykazaliśmy więc, że $\triangle ABC$ jest przystający do $\triangle DEC'$ i że $\triangle DEC'$ jest jednokładny do $\triangle A'B'C'$, to zaś, jak wiemy z lekcji 43, str. 215, dowodzi podobieństwa trójkątów ABC i $A'B'C'$. Jest więc

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \qquad \text{c. b. d. o.}$$

TWIERDZENIE III. **(Trzecia cecha podobieństwa trójkątów). Dwa trójkąty są podobne, jeżeli boki jednego z nich są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego.**

Niech będą dane dwa trójkąty: $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ (rys. 69).

Założenie: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$

Teza: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$.

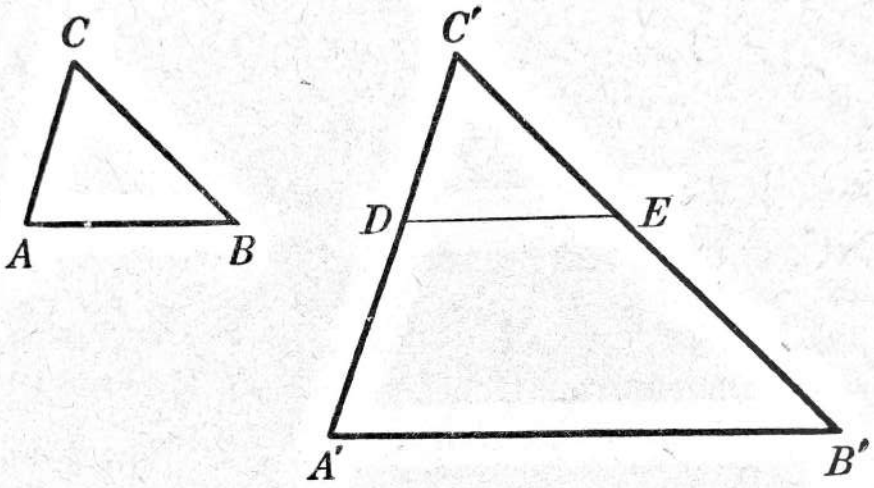
Dowód. W założeniu występują trzy równe stosunki, możemy więc każdy z nich oznaczyć tą samą literą k.

$$\frac{AB}{A'B'} = k, \quad \frac{BC}{B'C'} = k, \quad \frac{AC}{A'C'} = k.$$

Równości te możemy następnie napisać w postaci

(a) $$AB = k \cdot A'B', \quad BC = k \cdot B'C', \quad AC = k \cdot A'C'$$

Odłóżmy teraz na boku $A'C'$ (rys. 69) odcinek DC' równy bokowi AC i przez punkt D wykreślmy prostą równoległą do $A'B'$, przecinającą bok $B'C'$ w punkcie E. Otrzymamy trójkąt DEC' jednokładny do trójkąta $A'B'C'$ względem środka jednokładności C'. Trzeba więc tylko udowodnić, że $\triangle DEC'$ jest przystający do $\triangle ABC$.



Rys. 69

W figurach jednokładnych odpowiednie odcinki są proporcjonalne, więc

$$\frac{DE}{A'B'} = \frac{EC'}{B'C'} = \frac{DC'}{A'C'}$$

Ale z odłożenia $DC' = AC$, przeto

(b) $$\frac{DE}{A'B'} = \frac{EC'}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Stosunek $\frac{AC}{A'C'}$ oznaczyliśmy na początku dowodu literą k. Wobec równości (b) możemy również tą samą literą oznaczyć stosunki $\frac{DE}{A'B'}$ i $\frac{EC'}{B'C'}$:

$$\frac{DE}{A'B'} = k, \quad \frac{EC'}{B'C'} = k.$$

Ostatnie równości napiszmy w postaci

(c) $$DE = k \cdot A'B', \qquad EC' = k \cdot B'C',$$

i porównajmy równości (c) z dwiema pierwszymi równościami (a). Widzimy, że:

$AB = k \cdot A'B'$ i $DE = k \cdot A'B'$, więc $AB = DE$,
$BC = k \cdot B'C'$ i $EC' = k \cdot B'C'$, więc $BC = EC'$

Zestawmy:

$AB = DE$, $BC = EC'$, $AC = DC'$ (z odłożenia).

Równości te mówią nam, że boki trójkąta ABC są równe odpowiednim bokom trójkąta DEC'. Stąd na podstawie I cechy przystawania trójkątów wnioskujemy, że trójkąty te są przystające.

Wykazaliśmy więc, że $\triangle ABC$ jest przystający do $\triangle DEC'$, a $\triangle DEC'$ jest jednokładny do $\triangle A'B'C'$, to zaś dowodzi, że

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Uwaga. Za każdym razem, gdy wykażemy, że jakieś dwa trójkąty są podobne, możemy napisać, że ich odpowiednie kąty są równe, a boki odpowiednie są proporcjonalne.

Pytania

1. Wypowiedzcie poprawnie i udowodnijcie drugą cechę podobieństwa trójkątów.
2. Wypowiedzcie poprawnie i udowodnijcie trzecią cechę podobieństwa trójkątów.

Uwaga. Wszystkie cechy podobieństwa trójkątów trzeba stale pamiętać.

Zadania

1. Działka gruntu ma kształt trójkąta ABC, w którym $AB = 120$ m, $AC = 150$ m. Działkę tę przedstawiono na planie w ten sposób, że przeniesiono kąt A i na ramionach tego kąta odmierzono odcinki 4 cm i 5 cm. Czy trójkąt na planie jest podobny do trójkąta w terenie?

2. Dane są dwa trójkąty: $\triangle ABC$ o bokach $AB = 12$ cm, $BC = 10{,}4$ cm, $AC = 8{,}8$ cm i $\triangle A'B'C'$ o bokach $A'B' = 13{,}5$ cm, $B'C' = 11{,}7$ cm, $A'C' = 9{,}9$ cm. Czy trójkąty te są podobne?

Odpowiedzi

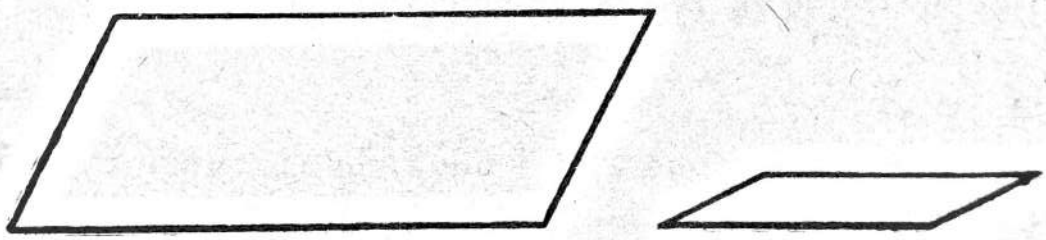
1. Tak. 2. Tak.

LEKCJA 47

O podobieństwie wielokątów i kół. Zadania liczbowe

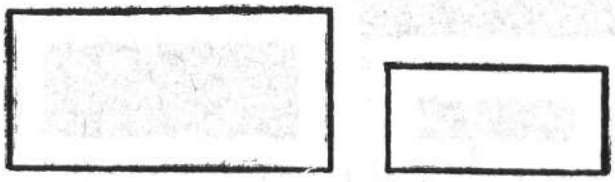
W poprzednich lekcjach poznaliśmy cechy podobieństwa trójkątów. Dla innych figur cechy podobieństwa nie są takie proste. Rozważanie ich wykraczałoby poza program szkolny, ograniczymy się więc tylko do krótkich wzmianek.

Dwa wielokąty, które mają boki proporcjonalne, mogą nie być podobne. Widać to z rys. 70. Boki równoległoboków są tam proporcjonalne, figury te nie są jednakże podobne, gdyż odpowiednie kąty nie są w nich równe.



Rys. 70

Dla prostokątów zachodzi następująca cecha podobieństwa:

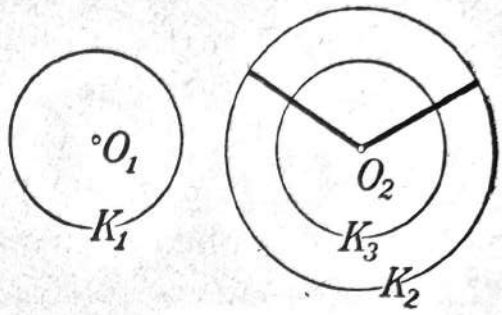


Rys. 71

Dwa prostokąty są podobne, jeżeli boki jednego z nich są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego (rys. 71).

Warto też pamiętać, **że każde dwa koła są podobne.** Mając np. koła K_1 i K_2 (rys. 72) możemy przenieść koło K_1 do położenia K_3 (K_2 i K_3 — współśrodkowe), a następnie przekształcić koło K_3 w koło K_2 przez jednokładność, przyjmując środek O_2 za środek jednokładności. Stosunek jednokładności będzie oczywiście równy stosunkowi promieni danych kół.

Będziemy teraz rozwiązywali różne zadania, w których występują trójkąty podobne. Przy sposobności powtórzymy niektóre wiadomości z klasy ósmej.



Rys. 72

Przykład 1. W równoległoboku $ABCD$ obrano na boku BC punkt E w ten sposób, że $BE : EC = 3 : 8$ i poprowadzono prostą DE przecinającą przedłużenie boku AB w punkcie F. Obliczyć bok AB równoległoboku wiedząc, że odcinek BF ma długość 10,5 cm.

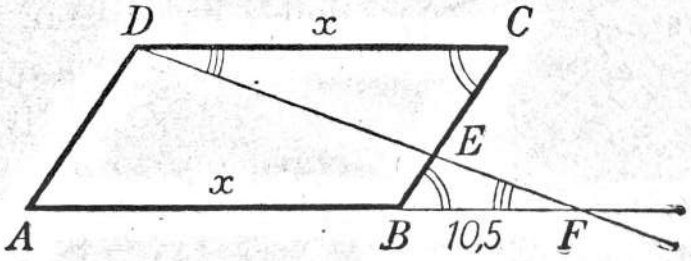
Rozwiązanie

Dane: $BF = 10{,}5$ cm, $\frac{BE}{EC} = \frac{3}{8}$

Trzeba obliczyć $AB = CD = x$ (rys. 73).

Rozpatrujemy dwa trójkąty: $\triangle BFE$ i $\triangle DEC$. Odpowiednie kąty tych trójkątów są równe (uzasadnijcie, dlaczego), wobec tego na podstawie I cechy podobieństwa trójkątów

$$\triangle BFE \sim \triangle DEC$$



Rys. 73

W trójkątach podobnych odpowiednie boki są proporcjonalne, przeto

(a) $$\frac{BF}{DC} = \frac{BE}{EC}$$

Podstawiając dane liczby oraz niewiadomą x mamy

$$\frac{10,5}{x} = \frac{3}{8}$$

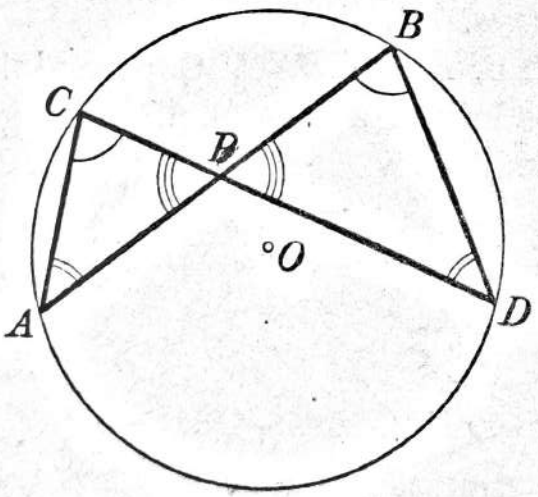
a stąd

$$3x = 84, \quad x = 28$$

Odpowiedź. Bok AB ma długość 28 cm.

Uwaga. Proporcję (a) utworzyliśmy w ten sposób, że najpierw w licznikach obu ułamków wypisaliśmy dwa znane boki trójkąta BFE, następnie zaś każdemu z tych liczników dobraliśmy odpowiedni bok trójkąta DEC. Pamiętajcie przy tym, że mówiąc o odpowiednich bokach trójkątów podobnych mamy na myśli boki leżące naprzeciw równych kątów. Tak np. w trójkątach BFE i DEC boki BE i EC są odpowiednie, gdyż BE leży (w $\triangle BFE$) naprzeciw kąta F, EC leży (w $\triangle DEC$) naprzeciw kąta D, a kąty te są równe.

Przykład 2. Przez punkt P leżący wewnątrz okręgu poprowadzono dwie proste, z których pierwsza przecina okrąg w punktach A i B, a druga w punktach C i D, jak na rys. 74. Następnie narysowano cięciwy AC i BD. 1) Wykazać, że trójkąty APC i PDB są podobne. 2) Zapisać za pomocą wzoru proporcjonalność boków tych trójkątów.



Rys. 74

Rozwiązanie

1) Trójkąty APC i PDB są podobne na podstawie I cechy podobieństwa trójkątów, gdyż:

$\sphericalangle C = \sphericalangle B$ (kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku AD).

$\sphericalangle A = \sphericalangle D$ (kąty wpisane w okrąg oparte na łuku CB).

Pozostałe kąty tych trójkątów są też równe (dlaczego?)

2) Przy zapisywaniu proporcjonalności boków rozważanych trójkątów dogodnie jest postępować w następujący sposób:

Piszemy trzy kreski ułamkowe łącząc je znakami równości,

$$- = - = -$$

Następnie nad kreskami wpisujemy boki jednego z tych trójkątów, np. boki $\triangle APC$:

$$\frac{AC}{\quad} = \frac{AP}{\quad} = \frac{PC}{\quad}$$

Potem do każdego z tych odcinków dobieramy odpowiedni bok drugiego trójkąta

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AP}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

Dobranie odpowiednich boków będzie przy tym ułatwione, jeżeli na rysunku równe kąty zaznaczymy jednakowo (np. pojedynczym łukiem, podwójnym łukiem itp.).

Pytania

1. Czy prawdziwe są zdania:
   a) „*Każde dwa trójkąty równoboczne są podobne*“?
   b) „*Każde dwa kwadraty są podobne*“?
2. Ułóżcie cechy podobieństwa dla a) równoległoboków, b) rombów.
3. W przykładzie 2 jest mowa o kątach wpisanych w okrąg. Czego nauczyliśmy się o tych kątach w klasie VIII?

Zadania

1. Przyjmując, że na rys. 74 jest $AB = 3\frac{1}{4}$ cm, $PB = 1\frac{1}{4}$ cm, $PD = 1$ cm, obliczyć CD.

2. Podstawy trapezu mają długość 9 cm i 16,5 cm, przekątne zaś 17 cm i $12\frac{3}{4}$ cm. Obliczyć odcinki, na które punkt przecięcia się przekątnych dzieli każdą z nich.

3. Do dwu okręgów zewnętrznie stycznych o promieniach 1,2 dcm i 1,6 dcm poprowadzono dwie wspólne styczne przecinające się w punkcie S. Obliczyć odległości punktu S od środków okręgów.

4. W trójkącie ABC bok AB ma długość 16,8 cm. Na bokach AC i BC obrano punkty D i E w ten sposób, że $AD = \frac{3}{4} DC$ i $BE = \frac{3}{4} EC$. Obliczyć długość odcinka DE.

*5. Prosta poprowadzona przez wierzchołek kąta ostrego rombu odcina na przedłużeniach dwóch boków odcinki 8 cm i 18 cm. Obliczyć bok rombu.

*6. W trójkącie ABC o bokach $AB = 32$ cm, $BC = 16$ cm, $AC = 24$ cm poprowadzono prostą DE równoległą do boku BC, która odcina na bokach AB i AC odcinki AD i AE tak, że $AD+AE = 35$ cm. Obliczyć długość odcinka DE.

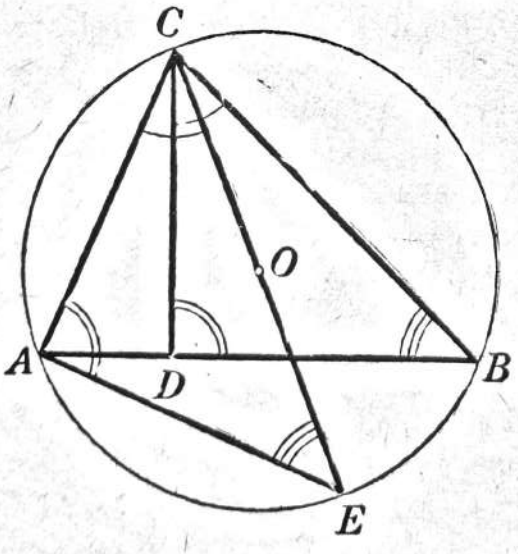
Odpowiedzi

1. $3\frac{1}{2}$. **2.** 6 cm i 11 cm; 4,5 cm i $8\frac{1}{4}$ cm. **3.** 8,4 dcm i 11,2 dcm. **4.** 9,6 cm. Wskazówka: Wywnioskować, że $AC = \frac{7}{4} DC$, $BC = \frac{7}{4} EC$. **5.** 12 cm. **6.** 10 cm.

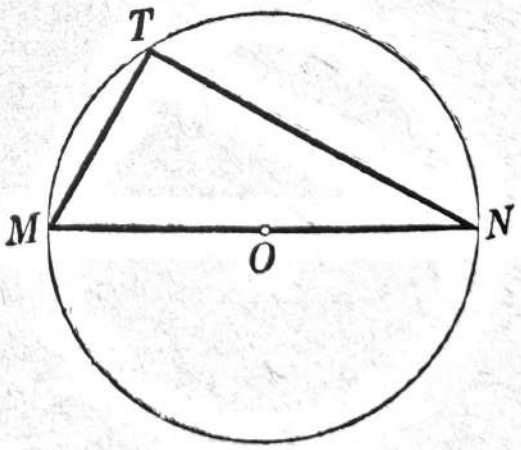
LEKCJA 48

Rozwiązywanie zadań (zastosowanie podobieństwa figur)

Przykład 1. W okrąg wpisano trójkąt ostrokątny ABC i narysowano wysokość CD trójkąta oraz średnicę CE jak na rys. 75. Następnie połączono odcinkiem punkty A i E. a) Wykazać, że trójkąty DBC i AEC są podobne. b) Zapisać za pomocą wzoru proporcjonalność boków tych trójkątów.



Rys. 75



Rys. 76

Rozwiązanie

a) Rozpatrujemy trójkąty: $\triangle CDB$ i $\triangle AEC$. W tych trójkątach $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ (kąty wpisane w okrąg oparte na łuku AC), $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CAE$ (kąty proste; $\sphericalangle CDB = 90°$, gdyż $CD \perp AB$; $\sphericalangle CAE = 90°$, gdyż jest to kąt wpisany w okrąg oparty na średnicy CE*).

Pozostałe kąty (które?) też są równe, gdyż suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie jest jednakowa.

Zatem $\triangle CDB \sim \triangle AEC$ na podstawie I cechy podobieństwa trójkątów.

b) Z podobieństwa trójkątów wynika proporcjonalność boków:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{DB}{AE} = \frac{BC}{EC}$$

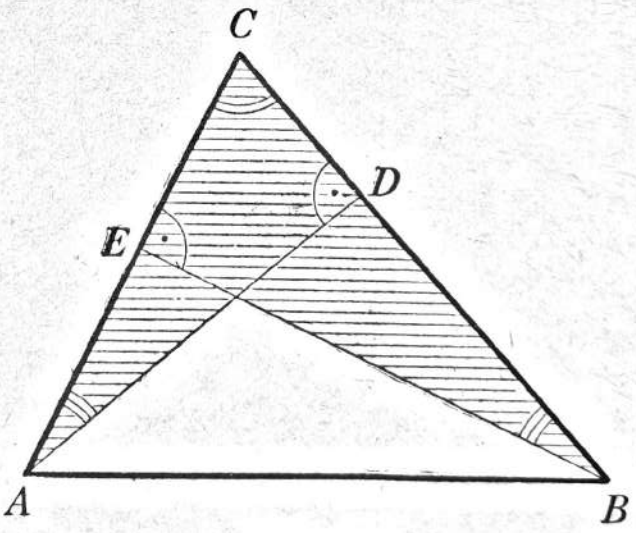
Uwaga. Zasłońcie tę proporcję (złożoną) kawałkiem papieru i napiszcie ją samodzielnie, kierując się wskazówkami z lekcji poprzedniej.

Przykład 2. W trójkącie ABC dane są boki $BC = 12$ cm, $AC = 10$ cm i suma wysokości $AD+BE = 11$ cm. Obliczyć wysokości AD i BE.

Rozwiązanie

Dane: $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $BC = 12$ cm, $AC = 10$ cm, $AD+BE = 11$ cm (rys. 77).

Obliczyć: $AD = x$ i $BE = 11-x$.



Rys. 77

Rozpatrujemy dwa trójkąty: $\triangle ADC$ i $\triangle EBC$ (na rys. 77 zacieniowane). Zachodzą one częściowo na siebie i to utrudnia nieco nasze rozważania. Przypatrujmy się więc tym trójkątom szczególnie uważnie. Widzimy, że

$\sphericalangle C$ jest kątem wspólnym dla obu trójkątów,

$\sphericalangle ADC = \sphericalangle CEB$, gdyż są to kąty proste.

*) Twierdzenie o kącie wpisanym w okrąg i opartym na średnicy przypominamy rysunkiem 76.

Pozostałe kąty tych trójkątów (które?) są też oczywiście równe, wobec tego $\triangle ADC \sim \triangle EBC$.

Poszukajmy teraz odpowiednich boków. Naprzeciw kąta C leży w trójkącie ADC bok AD, a w trójkącie EBC bok EB. Zatem pierwszą parę boków odpowiednich stanowią AD i EB.

Dalej, naprzeciw kąta prostego leży w trójkącie ADC bok AC, a w trójkącie EBC naprzeciw kąta prostego leży bok BC. Zatem drugą parę boków odpowiednich stanowią AC i BC.

Trzecia para boków odpowiednich jest już tym samym wyznaczona: CD i EC. Para ta nie interesuje nas jednakże w tym zadaniu, gdyż nie zawiera odcinków danych ani obliczanych.

Wiedząc, które boki są odpowiednie, możemy poprawnie napisać proporcję, musimy tylko baczyć, aby w licznikach występowały boki jednego trójkąta, a w mianownikach odpowiednie boki drugiego:

$$\frac{AD}{EB} = \frac{AC}{BC}$$

Dalej sprawa jest już prosta. Podstawiając dane liczbowe oraz wyrażenia z niewiadomą x, otrzymujemy proporcję

$$\frac{x}{11-x} = \frac{10}{12}$$

a z niej kolejno:

$$12x = 110-10x, \quad 12x+10x = 110, \quad 22x = 110$$

$$x = 5$$

Zatem: $AD = x = 5$ cm, $EB = 11-x = 6$ cm.

Odpowiedź. $AD = 5$ cm, $EB = 6$ cm.

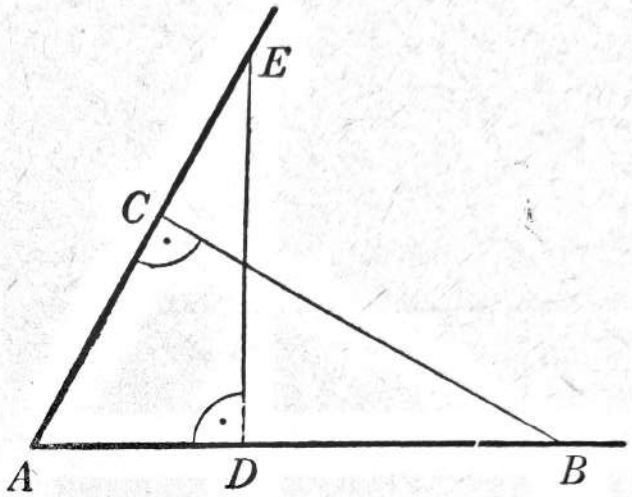
Uwaga. Dobrze przemyślcie to zadanie i uważnie rozwiążcie zadania zamieszczone niżej. Chodzi o to, żebyście w każdym wypadku umieli zanotować poprawnie proporcjonalność boków dwóch trójkątów, których podobieństwo zostało stwierdzone.

Zadania

1. Na rys. 78 jest $BC \perp AE$ i $ED \perp AB$. Wykazać, że trójkąty ADE i ABC są podobne. Zapisać w postaci wzoru proporcjo-

nalność boków tych trójkątów. Które jeszcze trójkąty na tym rysunku są podobne?

2. Z punktu P leżącego zewnątrz okręgu poprowadzono dwie proste, z których pierwsza przecina okrąg w punktach A i B, a druga w punktach C i D. Następnie połączono odcinkami punkty A i D oraz B i C. Wykazać, że trójkąty PCB i PAD są podobne. Zapisać za pomocą wzoru proporcjonalność boków tych trójkątów.



Rys. 78

3. Z punktu zewnętrznego P narysowano prostą styczną do okręgu w punkcie A oraz prostą sieczną przechodzącą przez środek okręgu O i przecinającą okrąg w punktach B i C (punkt B leży bliżej punktu P). Następnie przez punkt C narysowano prostą równoległą do stycznej i przecinającą okrąg w punkcie D. Wreszcie połączono odcinkami punkt O z punktem A i punkt B z punktem D. Wykazać, że trójkąty PAO i BDC są podobne. Zapisać za pomocą wzoru proporcjonalność boków tych trójkątów.

Odpowiedzi

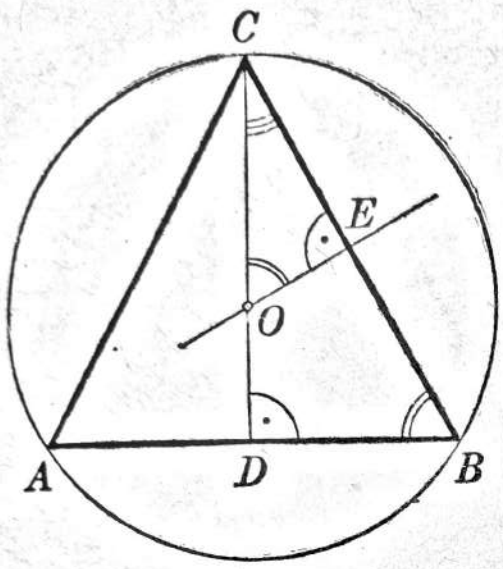
1. $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC}$. Każde dwa trójkąty na tym rysunku są podobne. 2. $\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA} = \frac{BC}{AD}$. 3. $\frac{PA}{DC} = \frac{PO}{BC} = \frac{AO}{BD}$.

LEKCJA 49

Rozwiązywanie zadań (zastosowanie podobieństwa figur)

Przykład 1. W trójkącie ABC boki AC i BC są równe i mają po 30 cm; wysokość CD równa się 24 cm. Na trójkącie tym opisano okrąg. Obliczyć promień tego okręgu.

Rozwiązanie. Przypominamy, że środkiem okręgu opisanego na trójkącie jest punkt, w którym przecinają się symetralne boków tego trójkąta. Trójkąt ABC występujący w naszym zadaniu jest równoramienny, przy czym $AC = BC$, wobec tego zamiast symetralnej boku AB można narysować wysokość z wierzchołka C (rys. 79). Symetralną boku CB rysujemy już zwykłym sposobem. W przecięciu wysokości CD i symetralnej boku CB otrzymujemy środek O okręgu opisanego. Promieniem okręgu jest odcinek OC.



Rys. 79

Dane: $AC = BC = 30$ cm, $CD = 24$ cm.

Obliczyć: $OC = x$.

Weźmy pod uwagę trójkąty: $\triangle DBC$ i $\triangle OEC$. W trójkątach tych kąt przy wierzchołku C jest wspólny, a kąty przy wierzchołkach D i E są proste. Zatem

$$\triangle DBC \sim \triangle OEC$$

Bokami odpowiednimi tych trójkątów są: BC i OC, CD i CE, DB i OE. Ostatnia para odcinków nas nie interesuje (dlaczego?), z pozostałych układamy proporcję

$$\frac{BC}{OC} = \frac{CD}{CE}$$

Podstawiając następnie: $BC = 30$ cm, $OC = x$, $CD = 24$ cm, $CE = 15$ cm (gdyż CE jest połową BC), otrzymujemy proporcję

$$\frac{30}{x} = \frac{24}{15}$$

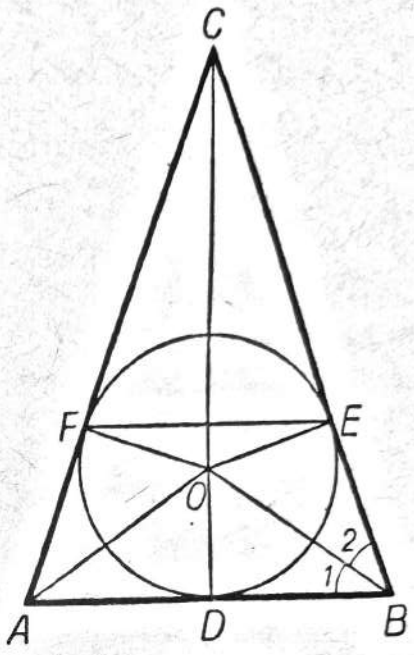
a z niej

$$x = 18\frac{3}{4}$$

Odpowiedź. Promień okręgu opisanego ma długość $18\frac{3}{4}$ cm.

Przykład 2. W trójkąt równoramienny ABC o bokach $AB = 10$ cm, $AC = BC = 16$ cm wpisano okrąg. Obliczyć odległość punktów styczności tego okręgu z bokami AC i BC.

Rozwiązanie. Środkiem okręgu wpisanego w trójkąt jest punkt, w którym przecinają się dwusieczne kątów tego trójkąta. Na rys. 80 wykreślono dwusieczne kątów B i C. Dwusieczna kąta C jest jednocześnie wysokością i środkową (gdyż $AC = BC$). Promieniami okręgu wpisanego poprowadzonymi do punktów styczności są odcinki OD, OE i OF prostopadłe odpowiednio do AB, BC i AC. Promień OD leży na dwusiecznej kąta C, promienie OE i OF nie leżą na dwusiecznych kątów B i A.



Rys. 80

Dane: $AB = 10$ cm, $AC = BC = 16$ cm.

Trzeba obliczyć $FE = x$.

Trójkąty prostokątne ODB i OEB są przystające (OB — wspólna przeciwprostokątna, $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$), przeto $BE = DB$. Ale $DB = 5$ cm, więc $BE = 5$ cm. Stąd $CE = CB - BE = 16$ cm $- 5$ cm $= 11$ cm.

Podobnie $AF = 5$ cm i $CF = 11$ cm.

Zatem stosunki $\frac{CA}{CF}$ i $\frac{CB}{CE}$ są równe, a to oznacza, że trójkąt CFE jest jednokładny do trójkąta ABC względem środka jednokładności C.

Figury jednokładne są podobne, więc

$$\triangle CEF \sim \triangle ABC$$

Z podobieństwa tych trójkątów wynika proporcja

$$\frac{FE}{AB} = \frac{CF}{CA}$$

a z niej otrzymujemy kolejno

$$\frac{x}{10} = \frac{11}{16}, \quad 16x = 110, \quad x = 6\frac{7}{8}.$$

Odpowiedź. Odcinek łączący punkty styczności okręgu z bokami AC i BC ma długość $6\frac{7}{8}$ cm.

Pytania do przykładu 1

1. W jaki sposób na trójkącie opisujemy okrąg?
2. Jak rozpoznawaliśmy, które boki trójkątów podobnych CDB i COE są odpowiednie?

Pytania do przykładu 2

1. Gdzie leży środek okręgu wpisanego w trójkąt?
2. Jak wyznaczamy punkty styczności okręgu z bokami trójkąta?
3. Wypowiedzcie cechę przystawania trójkątów prostokątnych, na której oparliśmy się stwierdzając równość trójkątów ODB i OBE.
4. Dlaczego trójkąty FEC i ABC są jednokładne?

Zadania

1. W równoległobok o przekątnych 12 cm i 15 cm wpisano romb w ten sposób, że jego boki są równoległe do przekątnych równoległoboku. Obliczyć bok rombu.

2. W trójkącie ABC, w którym $AC = BC$, $\sphericalangle C = 36°$, poprowadzono dwusieczną AD kąta A. Wykazać, że trójkąt ABD jest podobny do trójkąta ABC. Zapisać w postaci wzoru proporcjonalność boków tych trójkątów.

3. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $\sphericalangle C = 90°$, $AC = 6$ cm, $BC = 10$ cm, obrano na boku BC taki punkt D, że kąt ADC równa się kątowi CAB. Obliczyć CD i DB.

***4.** W trójkącie ABC, w którym $AB = 12$ cm, $BC = 18$ cm, $AC = 15$ cm, odłożono na boku BC odcinek $BD = 8$ cm. 1) Wykazać że $\triangle ADB$ jest podobny do $\triangle ABC$. 2) Obliczyć długość odcinka AD.

5. W prostokącie o bokach 6 cm i 10 cm prosta równoległa do mniejszego boku odcina prostokąt podobny do danego. Obliczyć jego boki.

Odpowiedzi

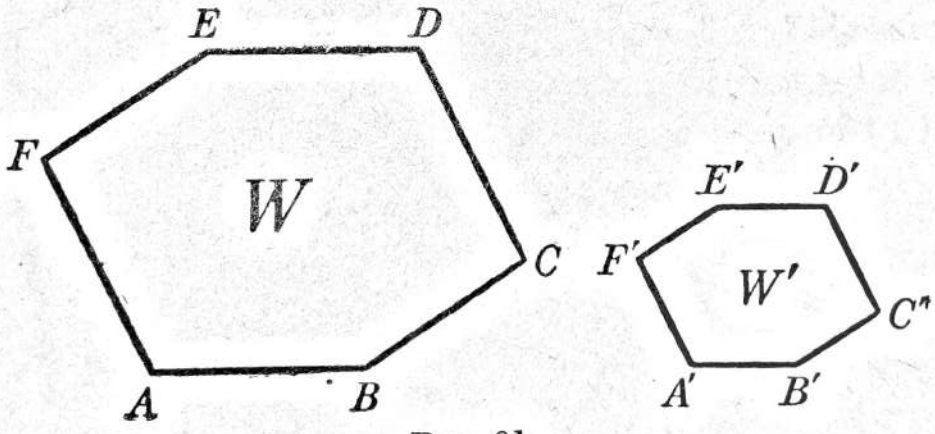
1. $6\frac{2}{3}$ cm. **2.** $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB}$. Wskazówka: Obliczyć kąty rozważanych trójkątów. **3.** $DC = 3{,}6$ cm; $DB = 6{,}4$ cm. **4.** 10 cm. Wskazówka: Zastosować drugą cechę podobieństwa trójkątów. **5.** 3,6 cm; 6 cm.

LEKCJA 50

Obwody wielokątów podobnych. Pola figur podobnych

Na zakończenie nauki o figurach podobnych udowodnimy jeszcze dwa następujące twierdzenia:

TWIERDZENIE 1. **Stosunek obwodów dwóch wielokątów podobnych jest równy stosunkowi odpowiednich boków, czyli równa się skali podobieństwa*) tych wielokątów.**



Rys. 81

Założenie: Wielokąt $W \sim$ wielokąt W' (rys. 81).

Teza: $\frac{\text{Obwód } W}{\text{Obwód } W'} = k$, gdzie k oznacza stosunek odpowiednich boków wielokątów W i W'.

Dowód. Zgodnie z założeniem mamy:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{FA}{F'A'} = k$$

*) O skali podobieństwa patrz str. 217.

a stąd

$$AB = k\cdot A'B', \qquad BC = k\cdot B'C', \qquad CD = k\cdot C'D'$$
$$DE = k\cdot D'E', \qquad EF = k\cdot E'F', \qquad FA = k\cdot F'A'$$

Wobec tego

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EF+FA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'F'+F'A'} =$$
$$= \frac{k\cdot A'B'+k\cdot B'C'+k\cdot C'D'+k\cdot D'E'+k\cdot E'F'+k\cdot F'A'}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'F'+F'A'} =$$
$$= \frac{k(A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'F'+F'A')}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'F'+F'A'} = k$$

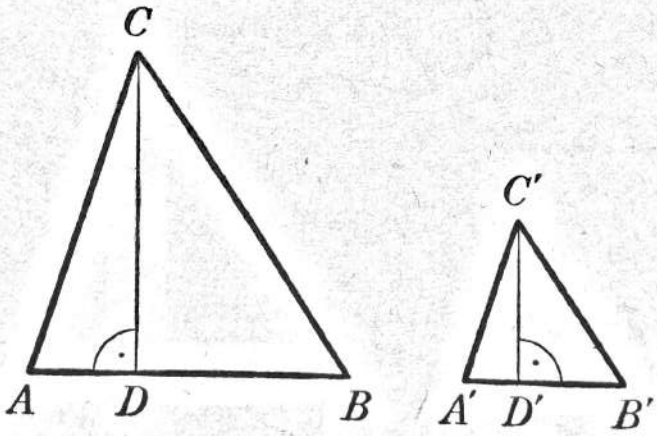
A więc istotnie

$$\frac{\text{Obwód } W}{\text{Obwód } W'} = k$$ c. b. d. o.

TWIERDZENIE 2. **Stosunek pól dwóch wielokątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa tych wielokątów.**

Twierdzenie to udowodnimy najpierw dla trójkątów, a następnie uogólnimy na inne wielokąty.

Niech będą dane dwa trójkąty: $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ o polach S i S' (rys. 82).



Rys. 82

Założenie: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Teza: $\frac{S}{S'} = k^2$ (k — skala podobieństwa)

Dowód. Narysujmy wysokości CD i $C'D'$ trójkątów ABC

i $A'B'C'$. W figurach podobnych odpowiednie odcinki są proporcjonalne, przeto

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{AB}{A'B'} = k$$

czyli

$$\frac{CD}{C'D'} = k \text{ i } \frac{AB}{A'B'} = k$$

Stąd

$$CD = k \cdot C'D' \text{ i } AB = k \cdot A'B'$$

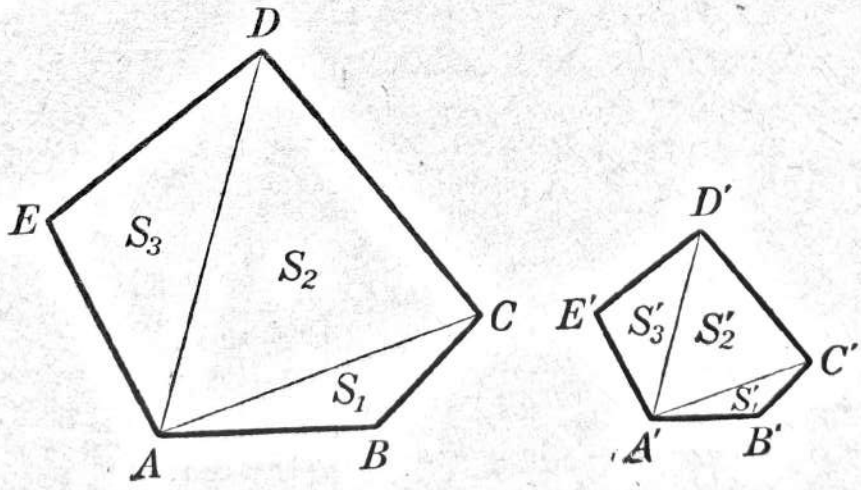
Obliczmy teraz stosunek pól trójkątów ABC i $A'B'C'$. Będzie

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot CD}{\frac{1}{2}A'B' \cdot C'D'} = \frac{\frac{1}{2}k \cdot A'B' \cdot k \cdot C'D'}{\frac{1}{2}A'B' \cdot C'D'} = \frac{\frac{1}{2}k^2 A'B' \cdot C'D'}{\frac{1}{2}A'B' \cdot C'D'} = k^2$$

Zatem istotnie

$$\frac{S}{S'} = k^2$$

Niech będą teraz dane dwa wielokąty podobne $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$ o polach S i S'. Wielokąty te dzielimy za pomocą przekątnych na trójkąty (także parami podobne) i oznaczamy ich pola jak na rys. 83.



Rys. 83

Będzie oczywiście

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \text{ i } S' = S'_1 + S'_2 + S'_3$$

Z udowodnionego przed chwilą twierdzenia o polach trójkątów podobnych wynika, że

$$\frac{S_1}{S'_1} = k^2, \quad \frac{S_2}{S'_2} = k^2, \quad \frac{S_3}{S'_3} = k^2$$

gdzie k oznacza skalę podobieństwa wielokątów $ABCDE$ i $A'B'C'D'E'$.

Ponieważ tym ostatnim równościom można nadać postać

$$S_1 = k^2 S'_1, \quad S_2 = k^2 S'_2, \quad S_3 = k^2 S'_3,$$

przeto mamy

$$\frac{S}{S'} = \frac{S_1+S_2+S_3}{S'_1+S'_2+S'_3} = \frac{k^2S'_1+k^2S'_2+k^2S'_3}{S'_1+S'_2+S'_3} = \frac{k^2(S'_1+S'_2+S'_3)}{S'_1+S'_2+S'_3} = k^2$$

Zatem istotnie również dla wielokątów podobnych jest

$$\frac{S}{S'} = k^2$$ c. b. d. o.

Uwaga 1. Aby lepiej zrozumieć sens udowodnionych twierdzeń, zilustrujemy je następującym przykładem. Przypuśćmy, że nie zmieniając kątów danego wielokąta powiększymy 3 razy każdy z jego boków. Wówczas obwód wielokąta powiększy się 3 razy, a pole wielokąta powiększy się 9 razy.

Uwaga 2. Twierdzenie 2 stosuje się nie tylko do wielokątów podobnych, lecz w ogóle do wszelkich figur podobnych.

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Dowód tego twierdzenia ogólnego pomijamy, gdyż byłby dla Was za trudny.

Pytania

1. Jakie twierdzenie o obwodach wielokątów podobnych poznaliśmy w tej lekcji?
2. Jakie twierdzenie o polach figur podobnych poznaliśmy w tej lekcji?

Przeprowadźcie dowód tego twierdzenia dla trójkątów podobnych.

3. Ile razy zwiększy się pole koła, gdy jego promień zwiększymy 5 razy?

Zadania

1. Średnica słupa telegraficznego wynosi 32 cm, a średnica ołówka wynosi 0,8 cm. Ile razy pole przekroju słupa jest większe od pola przekroju ołówka?

2. Stosunek odpowiednich wysokości w dwóch trójkątach podobnych jest równy $\frac{7}{3}$. Obliczyć pola tych trójkątów wiedząc, że jedno z nich jest większe od drugiego o 42 cm^2.

3. Mapka górnośląskiego obszaru przemysłowego sporządzona w skali 1 : 600 000 mieści się w prostokącie o wymiarach 7,4 cm i 4,5 cm. Ile km^2 zajmuje obszar przedstawiony przez ten prostokąt?

Odpowiedzi

1. 1600 razy. **2.** 51,45 cm^2 i 9,45 cm^2. **3.** 1198,8 km^2.

POWTÓRZENIE ALGEBRY

1. Podajcie określenie równania kwadratowego z jedną niewiadomą; napiszcie to równanie w postaci ogólnej i omówcie jego współczynniki.
2. Jakie znacie postacie równania kwadratowego niezupełnego?
3. Rozwiążcie równanie $ax^2+bx = 0$, gdzie $a \neq 0$. Co możecie powiedzieć o jego pierwiastkach?
4. Rozwiążcie równanie $ax^2+c = 0$, gdzie $a \neq 0$. Co możecie powiedzieć o jego pierwiastkach?
5. Rozwiążcie równanie $ax^2 = 0$, gdzie $a \neq 0$.
6. Rozwiążcie równanie $(x-m)^2 = 0$ i wyjaśnijcie, dlaczego mówimy, że ma ono dwa równe pierwiastki lub inaczej, że ma jeden pierwiastek podwójny?
7. Wyprowadźcie wzory na pierwiastki równania kwadratowego $ax^2+bx+c = 0$, gdzie $a \neq 0$. Co możecie powiedzieć o jego pierwiastkach, gdy 1) $\Delta > 0$, 2) $\Delta = 0$, 3) $\Delta < 0$?

8. Jaki jest warunek istnienia pierwiastków równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$, gdzie $a \neq 0$?
9. Wymieńcie kolejne czynności przy rozwiązywaniu równania ułamkowego

$$\left(\text{np. } \frac{2x-5}{x^2-6x+9} - \frac{7}{x+3} = \frac{5x-6}{x^2-9}\right)$$

sprowadzającego się do równania kwadratowego z jedną niewiadomą.

10. Wymieńcie kolejne czynności przy rozwiązywaniu zadania tekstowego prowadzącego do równania kwadratowego z jedną niewiadomą.

POWTÓRZENIE GEOMETRII

1. W jaki sposób rysujemy figury jednokładne wprost, a w jaki — figury jednokładne odwrotnie? Objaśnijcie na przykładzie.
2. Co nazywamy stosunkiem jednokładności? Objaśnijcie na przykładzie.
3. Co wiemy o odpowiednich odcinkach dwóch figur jednokładnych?
   Co wiemy o odpowiednich kątach dwóch figur jednokładnych?
4. Jakie znamy zastosowania jednokładności?
5. Podajcie określenie figur podobnych. Zilustrujcie to określenie rysunkiem.
6. Co wiemy o odpowiednich odcinkach figur podobnych?
   Co wiemy o odpowiednich kątach figur podobnych?
7. Co nazywamy skalą podobieństwa dwóch figur?
8. Wypowiedzcie poprawnie trzy cechy podobieństwa trójkątów. Do każdej z cech zróbcie rysunek, napiszcie założenie i tezę. Przeprowadźcie dowód jednej z cech podobieństwa trójkątów.
9. Co wiemy o stosunku pól dwóch figur podobnych?

ZADANIA

1. A) Rozwiązać równania:

a) $x^2+6x=0$ b) $2x^2=8x$ c) $\frac{1}{5}x^2=\frac{4}{15}x$

Wymienić kolejne czynności.

B) W trójkąt ABC wpisano kwadrat w ten sposób, że dwa jego wierzchołki leżą na boku AB. Obliczyć bok AB trójkąta wiedząc, że wysokość $CD=8$ cm, a bok kwadratu wpisanego ma długość 4,8 cm.

2. A) Rozwiązać równania:

a) $x^2-5=0$ b) $x^2+3=0$ c) $\frac{7}{9}x^2=21$ d) $-\frac{1}{11}x^2=\frac{2}{7}$

Wymienić kolejne czynności. Kiedy równanie tej postaci ma pierwiastki, a kiedy nie ma pierwiastków?

B) Dany jest trójkąt ABC i prosta równoległa do boku AB przecinająca boki AC i BC w punktach D i E. Obliczyć odcinek DC wiedząc, że $AB=15$ cm, $AD=8$ cm, $DE=10$ cm.

3. A) Rozwiązać równania:

a) $x^2=0$ b) $-5x^2=0$ c) $\frac{3}{4}x^2=\frac{1}{5}x^2$

B) W trójkąt o bokach $AC=15$ cm i $AB=18$ cm wpisano romb tak, że jego dwa boki leżą na danych bokach trójkąta. Obliczyć bok rombu.

4. A) Rozwiązać równania (nie stosując wzorów na pierwiastki):

a) $x^2-10x+25=0$ b) $9x^2+6x+1=0$

Co można powiedzieć o pierwiastkach tych równań?

B) Dany jest trójkąt o bokach 12 cm, 16 cm, 20 cm. Obliczyć boki trójkąta podobnego, którego średni bok wynosi 20 cm.

5. A) Rozwiązać równanie kwadratowe

$$25x^2-25x+6=0$$

nie stosując wzorów na pierwiastki. Wymienić kolejne czynności.

B) Stosunek obwodów dwu trójkątów podobnych wynosi 5 : 13. Dwa odpowiednie boki tych trójkątów różnią się o 12 cm. Obliczyć te boki.

6. A) Rozwiązać równanie

$$(5x-7) : (2x+1) = (x-8) : (x+4)$$

B) Obliczyć promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym, w którym każde z ramion ma długość 30 cm, a wysokość opuszczona na podstawę jest równa 20 cm.

7. A) Rozwiązać równanie

$$\frac{x^2+3}{5x-5} - \frac{3x-4}{2x-2} = \frac{2}{5}$$

B) Odpowiadające sobie boki dwóch wielokątów podobnych mają się do siebie jak 4 : 5, a pola tych wielokątów różnią się o 18 cm^2. Obliczyć pola tych wielokątów.

8. A) Rozwiązać równanie

$$\frac{x+2}{x^2-2x+1} + \frac{3x-8}{x-1} = 2$$

B) Dane są dwa trójkąty: $\triangle ABC$ o bokach 12 cm, 15 cm, 18 cm i $\triangle A'B'C'$ o bokach 16 cm, 20 cm, 24 cm. Wykazać, że trójkąty są podobne. Obliczyć stosunek pól tych trójkątów.

9. A) Rozwiązać równanie

$$\frac{3x-7}{x+1} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{8}{x^2-1}$$

B) W trójkątach ABC i $A'B'C'$ kąt A jest równy kątowi A', poza tym wiadomo, że $AB = 36$ cm, $AC = 44$ cm, $A'B' = 45$ cm, $A'C' = 55$ cm. Wykazać, że $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Obliczyć skalę podobieństwa i stosunek pól tych trójkątów.

10. A) Rozwiązać równanie

$$a^2x^2 - ax - 42 = 0$$

B) Na boku AD równoległoboku $ABCD$ obrano punkt E i wykreślono prostą BE, która przecina przedłużenie boku DC w punkcie F. Wykazać, że $\triangle ABE \sim \triangle BCF$. Zapisać proporcjonalność boków tych trójkątów.

11. A) Rozwiązać równanie

$$x^2-(3a-1)x+2a(a-1)=0$$

B) Dany jest trójkąt ABC, w którym narysowano wysokości AD i BE. Wyszukać na tej figurze trójkąty podobne. Uzasadnić podobieństwo tych trójkątów. Zapisać proporcjonalność ich boków.

12. A) Licznik ułamka jest o 1 mniejszy od jego mianownika. Jeżeli do tego ułamka dodamy jego odwrotność, to otrzymamy $2\frac{1}{12}$. Jaki to ułamek?

B) Co wiemy o polach figur podobnych? Wykazać, że stosunek pól trójkątów podobnych jest równy stosunkowi kwadratów odpowiednich boków tych trójkątów.

13. A) Pole prostokąta wynosi 96 cm^2. Obliczyć boki tego prostokąta, jeżeli wiadomo, że różnią się one o 4 cm.

B) Narysować trapez i wykreślić jego przekątne. Które z powstałych trójkątów są podobne i dlaczego? Zapisać proporcjonalność boków tych trójkątów.

14. A) Przyprostokątne trójkąta prostokątnego wynoszą 6 cm i 9 cm. O jaką jednakową ilość centymetrów należy zwiększyć te przyprostokątne, aby pole trójkąta zwiększyło się o 8 cm^2?

B) Wykazać, że jeśli połączymy końce dwóch przecinających się cięciw okręgu, to powstaną trójkąty podobne. Zapisać proporcjonalność boków tych trójkątów.

15. A) Uczeń przeczytał w ciągu kilku dni książkę mającą 360 stron, czytając dziennie jednakową ilość stron. Gdyby dziennie czytał o 20 stron więcej, to przeczytałby książkę w czasie o 3 dni krótszym. W ciągu ilu dni uczeń przeczytał książkę?

B) Wypowiedzieć trzy cechy podobieństwa trójkątów. Wypowiedzi zilustrować rysunkami.

16. A) Pole rombu wynosi 120 cm^2, a suma przekątnych tego rombu wynosi 34 cm. Obliczyć te przekątne.

B) Udowodnić jedną z cech podobieństwa trójkątów.

17. A) Motorówka płynie 35 km z prądem rzeki i 20 km przeciw prądowi, odbywając całą drogę w ciągu 3 godzin. Jaka jest prędkość własna motorówki, jeżeli prędkość prądu wynosi 3 km/godz?

B) Dany jest czworokąt $ABCD$ i punkt S. Narysować czworokąt $A'B'C'D'$ jednokładny do czworokąta $ABCD$ w stosunku 2 : 1. Co wiemy o bokach i kątach wielokątów jednokładnych?

18. A) Na drodze długości 150 m toczy się koło. Jeśli jego obwód zwiększymy o 50 cm, to na tej samej drodze wykona ono o 10 obrotów mniej. Jaki jest obwód koła?

B) W dany trójkąt wpisać kwadrat. (Zastosować metodę jednokładności).

19. A) Dwie maszynistki pracując razem przepisały rękopis w ciągu 12 godzin. Jedna z maszynistek pracując sama przepisałaby go w czasie o 7 godzin krótszym niż druga. W ciągu ilu godzin każda maszynistka może przepisać sama ten rękopis?

B) Wypowiedzieć określenie figur podobnych. Co wiemy o odpowiednich kątach i odpowiednich odcinkach wielokątów podobnych?

20. A) Przez dwa krany otwarte jednocześnie zbiornik napełnia się w ciągu 30 minut. Przez pierwszy tylko kran zbiornik napełnia się w czasie o 11 minut krótszym niż tylko przez drugi kran. W ciągu ilu minut przez każdy kran oddzielnie może napełnić się ten zbiornik?

B) W dany trójkąt wpisać prostokąt tak, żeby stosunek boków prostokąta wynosił 2 : 3. (Zastosować metodę jednokładności).

Algebra

Wzory Viète'a (lekcje 51 i 52). Równania dwukwadratowe i pierwiastkowe (lekcje od 53 do 57). Funkcja i jej wykres (lekcje 58 i 59). Funkcja liniowa i jej wykres (lekcje 60 i 61). Algebraiczne i graficzne rozwiązywanie układu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi (lekcje 62 i 63).

Geometria

Związki miarowe w trójkącie prostokątnym i ich zastosowanie do rozwiązywania zadań liczbowych i konstrukcyjnych (lekcje od 64 do 74).

Powtórzenie algebry

Powtórzenie geometrii

Pytania i zadania

LEKCJE 51 i 52

Suma i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego

Wiemy, że w wypadku, gdy wyróżnik jest nieujemny ($\Delta \geqslant 0$), równanie kwadratowe $ax^2+bx+c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma dwa różne lub dwa równe pierwiastki wyrażone wzorami:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ i } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Obliczmy sumę i iloczyn tych pierwiastków:

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

Otrzymaliśmy wzory noszące nazwę wzorów Viète'a *).

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Możemy je wypowiedzieć w następujący sposób:

Sumę pierwiastków równania kwadratowego obliczamy, dzieląc współczynnik przy niewiadomej w potędze pierwszej przez współczynnik przy niewiadomej w potędze drugiej i zmieniając znak otrzymanego ilorazu na przeciwny.

Iloczyn pierwiastków równania kwadratowego obliczamy, dzieląc wyraz wolny przez współczynnik przy niewiadomej w potędze drugiej.

Przykład 1. Nie rozwiązując poniższych równań obliczyć sumę i iloczyn pierwiastków:

a) $2x^2-5x-3=0$
b) $3x^2-7x=0$
c) $5x^2-6=0$

---

*) François Viète (czytaj: Wiet) — matematyk francuski (1540—1603).

Stwierdzamy najpierw, że równania te mają po 2 różne pierwiastki ($\Delta > 0$). Stosując wzory Viète'a otrzymamy:

dla a) $x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$, $\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2}$

dla b) $x_1+x_2 = \frac{7}{3}$, $\quad x_1 \cdot x_2 = 0$

dla c) $x_1+x_2 = 0$, $\quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{6}{5}$

Mając równanie kwadratowe o wyróżniku nieujemnym umiemy znaleźć jego pierwiastki. Zastanówmy się nad zagadnieniem odwrotnym: jak znaleźć równanie kwadratowe, którego pierwiastki są dane.

Weźmy równanie

(A) $$ax^2+bx+c = 0, \quad \text{gdzie } a \neq 0$$

Dzieląc obie strony równania przez a, otrzymujemy

(B) $$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = 0$$

Z postaci tej widzimy, że dla znalezienia równania kwadratowego wystarczy znać: $\frac{b}{a}$ i $\frac{c}{a}$.

Ale ze wzorów Viète'a wiemy, że

$$-\frac{b}{a} = x_1+x_2, \quad \text{a stąd } \frac{b}{a} = -(x_1+x_2)$$

oraz $$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Wobec tego równanie kwadratowe (B) przybierze postać:

(C) $$x^2-(x_1+x_2)x+x_1 \cdot x_2 = 0$$

W poniższych przykładach wykorzystamy znalezioną postać (C) do układania równań o danych pierwiastkach.

Przykład 2. Ułożyć równania kwadratowe mające ich pierwiastki:

a) $-3, 5$ b) $-\frac{3}{4}, \frac{2}{5}$ c) $\frac{2-\sqrt{3}}{3}, \frac{2+\sqrt{3}}{3}$

Obliczamy sumę i iloczyn pierwiastków:

a) $x_1+x_2=-3+5=2$; $\quad x_1\cdot x_2=-3\cdot 5=-15$

b) $x_1+x_2=-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=-\frac{7}{20}$; $\quad x_1\cdot x_2=-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=-\frac{6}{20}$

c) $x_1+x_2=\frac{2-\sqrt{3}}{3}+\frac{2+\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{3}$; $\quad x_1\cdot x_2=\frac{2-\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{9}$

Podstawiając powyższe wartości do równania (C) otrzymujemy

w przypadku a): $x^2-2x-15=0$

w przypadku b): $x^2+\frac{7}{20}x-\frac{6}{20}=0$

w przypadku c): $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{9}=0$

Są to właśnie poszukiwane równania. Pomnóżmy teraz obie strony drugiego z tych równań przez 20, a obie strony trzeciego przez 9. Będzie

$$20x^2+7x-6=0$$
$$9x^2-12x+1=0$$

Nietrudno sprawdzić, że również te ostatnie równania spełniają (odpowiednio) warunki b) i c) naszego zadania. Sprawdźcie!

Wzory Viète'a możemy stosować do rozwiązywania pamięciowego równań kwadratowych w prostych przypadkach, zakładając oczywiście, że równania te mają pierwiastki. Jeśli w równaniu kwadratowym $a=1$, to wzory Viète'a przybierają postać

$$x_1+x_2=-b \text{ i } x_1\cdot x_2=c$$

Łatwo zapamiętać, że w tym przypadku ($\Delta\geqslant 0$ i $a=1$) współczynnik b, wzięty ze znakiem przeciwnym, równa się sumie pierwiastków, a wyraz wolny c równa się iloczynowi pierwiastków. Pamięciowe rozwiązanie równania kwadratowego polegać będzie na odgadnięciu dwóch liczb, których suma i iloczyn będą dane.

Przykład 3. Rozwiązać pamięciowo równanie

$$x^2-7x+12=0$$

Określmy najpierw znaki pierwiastków :

1. Iloczyn ($x_1 \cdot x_2 = +12$) jest liczbą dodatnią, a więc pierwiastki mają znaki jednakowe.

2. Suma ($x_1 + x_2 = +7$) jest liczbą dodatnią. Zatem oba pierwiastki są liczbami dodatnimi.

Mamy teraz odgadnąć dwie liczby dodatnie, których suma jest równa 7, a iloczyn 12. Odgadywanie radzimy rozpoczynać (w pamięci) od rozkładania 12 na takie czynniki, aby ich suma równała się 7. Nietrudno odgadnąć, że są to liczby 3 i 4. Tak więc $x_1 = 3$ i $x_2 = 4$.

Przykład 4. Rozwiązać pamięciowo równanie

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

Określamy znaki pierwiastków. Iloczyn ($x_1 \cdot x_2 = -7$) jest liczbą ujemną, a więc pierwiastki mają znaki różne.

Mamy odgadnąć dwie liczby o znakach różnych, których suma wynosi 6, a iloczyn -7. Są to liczby -1 i 7.

Tak więc $x_1 = -1$ i $x_2 = 7$.

Przykład 5. Rozwiązać pamięciowo równanie

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

Określamy znaki pierwiastków:

1. Iloczyn ($x_1 \cdot x_2 = +15$) jest liczbą dodatnią, a więc pierwiastki mają znaki jednakowe.

2. Suma ($x_1 + x_2 = -8$) jest liczbą ujemną. Zatem oba pierwiastki są liczbami ujemnymi.

Nietrudno odgadnąć, że $x_1 = -5$ i $x_2 = -3$.

Pytania

1. Wyprowadźcie wzory na sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$. Wypowiedzcie te wzory słowami.
2. Czemu się równa suma i iloczyn pierwiastków równania, w którym $a = 1$?

3. Wyprowadźcie poniższą postać równania kwadratowego

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1 \cdot x_2 = 0$$

gdzie x_1 i x_2 są jego pierwiastkami.

4. Omówcie sposób postępowania przy znajdywaniu równania kwadratowego, gdy dane są jego pierwiastki.

5. Omówcie sposób rozumowania przy pamięciowym rozwiązywaniu równań kwadratowych na przykładzie

$$x^2-10x+21 = 0.$$

Zadania

1. Nie rozwiązując poniższych równań, zbadajcie, czy mają one pierwiastki, a następnie znajdźcie ich sumę i iloczyn:

a) $x^2-9x+8 = 0$
b) $x^2+8x-20 = 0$
c) $3x^2-10x-8 = 0$
d) $5x^2+6x+1 = 0$
*e) $x^2-6x-7 = 0$
*f) $x^2+11x+24 = 0$
*g) $7x^2+13x-2 = 0$
*h) $6x^2-17x-3 = 0$
i) $x^2-16 = 0$
j) $2x^2+5x = 0$

2. Ułóżcie równania kwadratowe, mając dane ich pierwiastki:

a) $-2, 3$
b) $-7, -5$
*c) $+\frac{3}{4}, 5$
*d) $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$
e) $3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}$
*f) $\frac{2-\sqrt{5}}{2}, \frac{2+\sqrt{5}}{2}$
g) $0, -\frac{7}{8}$
h) $-5, 5$

3. Rozwiążcie pamięciowo równania:

a) $x^2-8x+12 = 0$
b) $x^2-11x+24 = 0$
c) $x^2+7x+10 = 0$
d) $x^2+12x+32 = 0$
e) $x^2-3x-10 = 0$
f) $x^2-x-12 = 0$
g) $x^2+9x-10 = 0$
h) $x^2+5x+6 = 0$
i) $x^2+2x-8 = 0$
j) $x^2-3x-4 = 0$

2. a) $x^2-x-6=0$, b) $x^2+12x+35=0$, c) $4x^2-23x+15=0$, d) $6x^2+7x+2=0$, e) $x^2-6x+7=0$, f) $4x^2-8x-1=0$, g) $8x^2+7x=0$, h) $x^2-25=0$.

LEKCJA 53

Równania dwukwadratowe

OKREŚLENIE. Równaniem dwukwadratowym nazywamy równanie stopnia czwartego, w którym niewiadoma występuje tylko w potęgach o wykładniku parzystym.

Równanie dwukwadratowe ma postać

$$ax^4+bx^2+c=0, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Metodę rozwiązywania równań dwukwadratowych pokażemy na przykładach.

Przykład 1. Rozwiązać równanie

$$x^4-13x^2+36=0$$

Wprowadzamy niewiadomą pomocniczą

$$y=x^2$$

Równanie nasze przybierze postać

$$y^2-13y+36=0$$

Pierwiastkami tego równania są:

$$y_1=4 \quad \text{i} \quad y_2=9$$

Po podstawieniu tych wartości do równania $y=x^2$ dochodzimy do dwu równań kwadratowych niezupełnych postaci:

$$x^2=4 \quad \text{i} \quad x^2=9$$

Po rozwiązaniu pierwszego równania otrzymujemy dwie wartości x, które oznaczmy przez x_1 i x_2:

$$x_1 = -2 \quad \text{i} \quad x_2 = 2$$

a po rozwiązaniu drugiego dwie inne wartości, które oznaczmy przez x_3 i x_4:

$$x_3 = -3 \quad \text{i} \quad x_4 = 3$$

Równanie nasze ma więc cztery pierwiastki

$$x_1 = -2, \; x_2 = 2, \; x_3 = -3, \; x_4 = 3$$

Sprawdźcie!

Przykład 2. Rozwiązać równanie

$$2x^4 - 49x^2 - 25 = 0$$

Wprowadzamy niewiadomą pomocniczą

$$y = x^2$$

rozwiązując równanie

$$2y^2 - 49y - 25 = 0$$

otrzymujemy dwie wartości y:

$$y_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad y_2 = 25$$

Podstawiając te wartości do równania $y = x^2$, dochodzimy do dwu równań:

$$x^2 = -\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad x^2 = 25$$

Pierwsze z nich nie ma rozwiązania, natomiast drugie ma dwa pierwiastki

$$x_1 = -5 \quad \text{i} \quad x_2 = 5$$

Dane równanie dwukwadratowe ma zatem dwa pierwiastki

$$x_1 = -5 \quad \text{i} \quad x_2 = 5$$

Sprawdźcie!

Przykład 3. Rozwiązać równanie

$$x^4+10x^2+16=0$$

Podstawiamy $y=x^2$ i rozwiązujemy równanie

$$y^2+10y+16=0$$

Otrzymujemy dwie wartości y:

$$y_1=-8, \quad y_2=-2$$

Podstawiając te wartości do równania $y=x^2$, dochodzimy do dwu równań:

$$x^2=-2 \quad \text{i} \quad x^2=-8$$

Oba te równania nie mają pierwiastków, zatem i równanie dwukwadratowe nie ma pierwiastków.

Przykład 4. Rozwiązać równanie

$$6x^4-5x^2+2=0$$

Po wprowadzeniu niewiadomej pomocniczej $y=x^2$ otrzymujemy równanie kwadratowe

$$6y^2-5y+2=0$$

którego wyróżnik jest ujemny ($\Delta=25-48=-23$).

Równanie to nie ma pierwiastków, zatem i dane równanie dwukwadratowe nie ma pierwiastków.

Z przerobionych przykładów widzimy, że rozwiązanie równania dwukwadratowego

(A) $$ax^4+bx^2+c=0, \text{ gdzie } a\neq 0$$

sprowadza się do rozwiązania układu równań

(1)
(2)
$$\begin{cases} ay^2+by+c=0 \\ x^2=y \end{cases}$$

Stąd wniosek:

a) jeżeli wyróżnik równania (1) jest ujemny ($\Delta<0$), to równanie (1), jak i równanie dwukwadratowe nie mają pierwiastków,

b) jeżeli wyróżnik równania (1) jest nieujemny ($\Delta \geqslant 0$), to równanie dwukwadratowe może mieć cztery, dwa lub nie mieć wcale pierwiastków zależnie od tego, jakie znaki mają y_1 i y_2, tj. pierwiastki równania (1).

Pytania

1. Podajcie określenie równania dwukwadratowego.
2. Opiszcie metodę rozwiązywania równań dwukwadratowych.
3. Kiedy równanie dwukwadratowe ma 4 różne pierwiastki?
4. Kiedy równanie dwukwadratowe ma 2 różne pierwiastki?
5. Kiedy równanie dwukwadratowe nie ma pierwiastków?

Zadania

1. Rozwiążcie równania:

a) $x^4-17x^2+16=0$
b) $x^4+6x^2+8=0$
c) $x^4-2x^2-15=0$
d) $x^4+3x^2+4=0$
e) $9x^4-6x^2+1=0$
f) $4x^4+4x^2+1=0$
g) $2x^4-9x^2+4=0$
*h) $2x^4+5x^2-7=0$
i) $x^4-18x^2=0$
j) $3x^4+8x^2=0$
k) $x^4-49=0$
*l) $x^4-5=0$
*ł) $2x^4+3=0$

2. Rozwiążcie równania:

a) $x^2+\frac{72}{x^2}=38$

*b) $x^2-\frac{30}{x^2}=1$

c) $\frac{1}{x^2}+2=\frac{2x^2+1}{4}$

*d) $x^2+\left(\frac{16-x^2}{2x}\right)^2=13$

*e) $\frac{x^2}{2-x^2}+\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{3}{2}$

Odpowiedzi

2. a) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, -6, 6, b) $-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$, c) -2, 2, d) -2, 2, $-\frac{8}{\sqrt{5}}$, $\frac{8}{\sqrt{5}}$, e) -1, 1.

LEKCJE 54 i 55

Równania pierwiastkowe

OKREŚLENIE. **Równaniem pierwiastkowym albo niewymiernym** nazywamy takie równanie, w którym niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka.

Równaniami pierwiastkowymi są:

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=1$$

$$\sqrt{x-1}+x=\sqrt{3x-8}$$

$$\sqrt[3]{9-x}+5=7x$$

Równanie natomiast $x\sqrt{3}-8=(\sqrt{2}+3)\,x+3\sqrt{6}$, chociaż zawiera pierwiastki, nie jest równaniem niewymiernym. Jest to równanie stopnia pierwszego, którego współczynniki są liczbami niewymiernymi.

Metodę rozwiązywania równań pierwiastkowych poznamy na przykładach.

Przykład 1. Rozwiązać równanie

$$3x-5=2x-2+\sqrt{6x-23} \tag{A}$$

Pierwiastek pozostawiamy na jednej stronie równania, a pozostałe wyrazy przenosimy na drugą stronę równania. Mówimy, że pierwiastek izolowaliśmy. Otrzymujemy:

$$\sqrt{6x-23}=x-3$$

Obie strony równania podnosimy do kwadratu i porządkujemy:

$$\left(\sqrt{6x-23}\right)^2=(x-3)^2$$

$$6x-23=x^2-6x+9$$

$$x^2-12x+32=0 \tag{B}$$

Doszliśmy do równania wymiernego, po rozwiązaniu którego mamy dwie wartości x:

$$x_1=4 \quad \text{i} \quad x_2=8$$

Sprawdzenie:

dla $x = 4$ mamy: $L = 3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$

$$P = 2 \cdot 4 - 2 + \sqrt{6 \cdot 4 - 23} = 8 - 2 + \sqrt{24 - 23} = 7,$$

a więc $L = P$

dla $x = 8$ mamy: $L = 3 \cdot 8 - 5 = 24 - 5 = 19$

$$P = 2 \cdot 8 - 2 + \sqrt{6 \cdot 8 - 23} = 16 - 2 +$$

$$+ \sqrt{48 - 23} = 19, \quad \text{a więc} \quad L = P$$

Oba pierwiastki $x_1 = 4$ i $x_2 = 8$ równania wymiernego (B) są jednocześnie pierwiastkami danego równania pierwiastkowego (A).

Przykład 2. Rozwiązać równanie

$$\text{(A)} \qquad \sqrt{5x+6} = 2 - 3x$$

Podnosimy obie strony do kwadratu, a następnie porządkujemy:

$$(\sqrt{5x+6})^2 = (2-3x)^2$$

$$5x + 6 = 4 - 12x + 9x^2$$

$$\text{(B)} \qquad 9x^2 - 17x - 2 = 0$$

Pierwiastkami otrzymanego równania wymiernego (B) są:

$$x_1 = -\frac{1}{9} \quad \text{i} \quad x_2 = 2$$

Sprawdzenie:

dla $x = -\frac{1}{9}$ mamy: $L = \sqrt{-\frac{5}{9} + 6} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}$

$$P = 2 + 3 \cdot \frac{1}{9} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}, \quad \text{a więc} \quad L = P$$

dla $x = 2$ mamy: $L = \sqrt{10+6} = \sqrt{16} = 4$

$$P = 2 - 6 = -4, \quad \text{a więc} \quad L \neq P$$

Z dwu pierwiastków równania (B) tylko jeden $x = -\frac{1}{9}$ jest pierwiastkiem danego równania niewymiernego (A).

Przykład 3. Rozwiązać równanie

$$\text{(A)} \qquad \sqrt{5x-11} = 1-x$$

Podnosimy obie strony do kwadratu, a następnie porządkujemy:

$$(\sqrt{5x-11})^2 = (1-x)^2$$
$$5x-11 = 1-2x+x^2$$
$$\text{(B)} \qquad x^2-7x+12 = 0$$

Otrzymane równanie wymierne (B) ma dwa pierwiastki:

$$x_1 = 3 \quad \text{i} \quad x_2 = 4$$

Sprawdzenie:

dla $x = 3$ mamy: $L = \sqrt{15-11} = \sqrt{4} = 2$

$P = 1-3 = -2$, a więc $L \neq P$

dla $x = 4$ mamy: $L = \sqrt{20-11} = \sqrt{9} = 3$

$P = 1-4 = -3$, a więc $L \neq P$

Z dwu pierwiastków równania wymiernego (B) żaden nie jest pierwiastkiem danego równania niewymiernego. Stąd wniosek, że jest ono równaniem sprzecznym, nie mającym rozwiązań.

Z przerobionych przykładów wyciągniemy wnioski:

1. Jeżeli równanie niewymierne (A) zawiera pierwiastek kwadratowy, to podstawową czynnością przy rozwiązaniu tego równania jest podniesienie obu jego stron do kwadratu (po uprzednim izolowaniu tego pierwiastka), co prowadzi do równania wymiernego (B).

2. Może się zdarzyć, że pewne (a nawet wszystkie) pierwiastki równania wymiernego (B) nie są pierwiastkami danego równania niewymiernego (A).

Fakt ten wyjaśnimy bliżej na prostym przykładzie.

Weźmy równanie: $x = 2$.

i podnieśmy obie jego strony do kwadratu

$$x^2 = 4$$

Otrzymaliśmy nowe równanie, którego pierwiastkami są dwie liczby -2 i 2.

Liczba -2 nie spełnia równania pierwotnego.

Widzimy więc, że przez podniesienie obu stron równania do kwadratu wprowadziliśmy dodatkowy pierwiastek, który nazywać będziemy obcym.

3. Przy rozwiązywaniu równań niewymiernych zachodzi więc konieczność eliminowania pierwiastków obcych, czego dokonujemy przez sprawdzanie.

Podkreślamy zatem, że **sprawdzanie przy rozwiązywaniu równań pierwiastkowych jest konieczne i stanowi zasadniczą część samego rozwiązania.** Ma ono na celu wykrycie i odrzucenie pierwiastków obcych.

W dalszym ciągu poznamy się z różnymi typami równań pierwiastkowych.

Przykład 4. Rozwiązać równanie

$$\frac{2+3\sqrt{x-1}}{7-2\sqrt{x-1}}=\frac{8}{3}$$

Przekształcając dane równanie otrzymamy kolejno:

$$3(2+3\sqrt{x-1})=8(7-2\sqrt{x-1})$$
$$6+9\sqrt{x-1}=56-16\sqrt{x-1}$$
$$25\sqrt{x-1}=50$$
$$\sqrt{x-1}=2$$

Podnosimy obie strony do kwadratu

$$x-1=4$$

a stąd

$$x=5$$

Wykonując sprawdzenie przekonacie się, że liczba 5 jest pierwiastkiem danego równania.

Przykład 5. Rozwiązać równanie

$$\sqrt[3]{x^3-19}+1=x$$

Izolujemy pierwiastek

$$\sqrt[3]{x^3-19}=x-1$$

Obie strony równania podnosimy do potęgi trzeciej:

$$(\sqrt[3]{x^3-19})^3 = (x-1)^3$$

$$x^3-19 = x^3-3x^2+3x-1$$

$$3x^2-3x-18 = 0$$

$$x^2-x-6 = 0$$

Otrzymane równanie ma dwa pierwiastki

$$x_1 = -2 \quad \text{i} \quad x_2 = 3$$

Wykonując sprawdzenie przekonacie się, że liczby te są pierwiastkami danego równania.

Pytania

1. Podajcie określenie i przykłady równań pierwiastkowych.
2. Podajcie plan rozwiązania równania pierwiastkowego, np. dla równania: $5+2x+\sqrt{x+5} = x+6$.
3. Jaka czynność przy rozwiązywaniu równań pierwiastkowych może spowodować wprowadzenie pierwiastków obcych? Wyjaśnijcie na prostym przykładzie.
4. Jak wykrywamy pierwiastki obce?
5. Jaką czynnością musimy zakończyć rozwiązywanie równań pierwiastkowych?

Zadania

1. Rozwiążcie równania:

a) $3\sqrt{x} = 21$

b) $\frac{2}{3}\sqrt{x} = \frac{1}{9}$

c) $\sqrt{x-2}-3 = 1$

d) $2\sqrt{x-3} = 3\sqrt{2}$

e) $2\sqrt{2x+5} = 6$

f) $8\sqrt{5-\sqrt{2x}} = 8$

*g) $\sqrt{6\sqrt{x}-27} = 3\sqrt{3}$

*h) $3\sqrt{x+4}+8 = 10-2\sqrt{x+4}$

2. Rozwiążcie równania:

a) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+3}$

b) $\sqrt{x-5} = \sqrt{2-3x}$

c) $2+\sqrt[3]{9-x} = 4$

*d) $2\sqrt[4]{3x+1} = 4$

*e) $\sqrt{x-3} = \sqrt[4]{3x-11}$

*f) $\sqrt[6]{5x^2-x+5} = \sqrt[3]{2x+1}$

*g) $\sqrt[4]{11+\sqrt{3x-5}}-2 = 0$

*h) $\sqrt[4]{3-\sqrt[3]{3x-1}} = 1$

3. Rozwiążcie równania:

a) $\dfrac{3\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}} = 1$

b) $\dfrac{6+7\sqrt{x}}{5-2\sqrt{x}} = 20$

*c) $\dfrac{3}{7-2\sqrt{x+1}} = \dfrac{5}{11-3\sqrt{x+1}}$

d) $(3+2\sqrt{x})\,(5-\sqrt{x}) = 29-2x$

*e) $(7-2\sqrt{x})\,(1+3\sqrt{x}) = (8-\sqrt{6x})\,(8+\sqrt{6x})$

*f) $(2\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+3)^2 = 5\sqrt{x}(2+\sqrt{x})$

4. Rozwiążcie równania:

a) $\sqrt{2x+1} = 1-x$

b) $x+\sqrt{x+5} = 1$

c) $2\sqrt{x-5}+x = 13$

*d) $\sqrt{6x-26}+x = 3$

*e) $x = 4+\sqrt{4x-19}$

f) $x-\sqrt{4x-23} = 5$

g) $\sqrt{2x^2+x-1} = 2x-1$

h) $1+\sqrt{25x^2-11x+4} = 5x$

*i) $\sqrt{\sqrt{19x+11}-2x} = \sqrt{3}$

*j) $\dfrac{x-2\sqrt{x}+3}{2x-4\sqrt{x}+1} = 3$

Odpowiedzi

1. a) 49, b) $\frac{1}{36}$, c) 18, d) $\frac{15}{2}$, e) 2, f) 8, g) 81, h) $-\frac{96}{25}$.

2. a) 4, b) nie ma, c) 1, d) 5, e) 4 i 5, f) 1 i 4, g) 10, h) 3.

3. a) 1, b) 4, c) 3, d) 4, e) 9, f) $\frac{25}{16}$.

4. a) 0, b) -1, c) 9, d) nie ma, e) 5 i 7, f) 6 i 8, g) $\frac{1}{2}$ i 2, h) 3, i) $-\frac{1}{4}$ i 2, j) 0 i 4.

LEKCJE 56 i 57

Równania pierwiastkowe

Tematem bieżącej lekcji będą równania pierwiastkowe, w których występuje dwa lub więcej pierwiastków kwadratowych.

Przykład 1. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$$

Jeden z pierwiastków izolujemy, np. $\sqrt{3x+1}$ pozostawiamy na lewej stronie, a inne wyrazy przenosimy na prawą stronę

$$\sqrt{3x+1}=1+\sqrt{x+4}$$

Obie strony równania podnosimy do kwadratu

$$(\sqrt{3x+1})^2=(1+\sqrt{x+4})^2$$

Należy pamiętać, że po prawej stronie mamy dwumian, a więc podnosimy go do kwadratu zgodnie ze wzorem $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

$$3x+1=1+2\sqrt{x+4}+x+4$$

W wyniku podniesienia do kwadratu otrzymaliśmy równanie, które zawiera tylko jeden pierwiastek. Izolujemy go, przenosząc pozostałe wyrazy na inną stronę. Mamy

$$2\sqrt{x+4}=2x-4$$

Dzielimy obie strony przez 2

$$\sqrt{x+4} = x-2$$

Powtórnie podnosimy do kwadratu

$$(\sqrt{x+4})^2 = (x-2)^2$$
$$x+4 = x^2-4x+4$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie

$$x^2-5x = 0$$

którego pierwiastkami są: $x_1 = 0$ i $x_2 = 5$.

Sprawdzenie:

dla $x = 0$ mamy: $L = \sqrt{1}-\sqrt{4} = 1-2 = -1$
$P = 1$, a więc $L \neq P$

dla $x = 5$ mamy: $L = \sqrt{15+1}-\sqrt{5+4} = \sqrt{16}-\sqrt{9} = 4-3 = 1$
$P = 1$, a więc $L = P$

Równanie dane ma jeden pierwiastek $x = 5$, natomiast $x = 0$ jest pierwiastkiem obcym.

Przykład 2. Rozwiązać równanie

$$3\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}-\sqrt{10x-4} = 0$$

Jedno z wyrażeń pierwiastkowych izolujemy, np. $-\sqrt{10x-4}$ przenosimy na prawą stronę równania, a następnie obie strony równania podnosimy do kwadratu. Otrzymamy kolejno:

$$(3\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{10x-4})^2$$
$$9x+18-12\sqrt{(x-1)(x+2)}+4x-4 = 10x-4$$

Otrzymane wyrażenie pierwiastkowe znów izolujemy, przeprowadzamy redukcję po przeciwnej stronie równania i powtórnie podnosimy obie strony równania do kwadratu:

$$12\sqrt{x^2+x-2} = 3x+18$$
$$4\sqrt{x^2+x-2} = x+6$$

$$16x^2+16x-32 = x^2+12x+36$$

a stąd $$15x^2+4x-68 = 0$$

Pierwiastkami tego równania są: $x_1 = -\frac{34}{15}$ i $x_2 = 2$.

Sprawdzenie:

Dla $x = -\frac{34}{15}$ występujące w równaniu wyrażenia pierwiastkowe nie mają wartości liczbowej, zatem $x = -\frac{34}{15}$ nie jest pierwiastkiem danego równania.

Dla $x = 2$ mamy: $L = 3\sqrt{2+2}-2\sqrt{2-1}-\sqrt{20-4} = 3\sqrt{4}-2\sqrt{1}-$ $-\sqrt{16} = 6-2-4 = 0$, $P = 0$, zatem $L = P$.

Równanie dane ma jeden pierwiastek: $x = 2$.

Przykład 3*. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}-\sqrt{x+8} = \sqrt{x-7}$$

Rozdzielamy pierwiastki tak, by występowały po dwa na każdej stronie równania:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4} = \sqrt{x+8}+\sqrt{x-7}$$

Podnosimy do kwadratu obie strony równania:

$$x+1+2\sqrt{(x+1)(x-4)}+x-4 = x+8+2\sqrt{(x+8)(x-7)}+x-7$$

Z dwu otrzymanych wyrażeń pierwiastkowych jedno izolujemy

$$2\sqrt{(x+1)(x-4)} = 2\sqrt{(x+8)(x-7)}+4$$
$$\sqrt{(x+1)(x-4)} = \sqrt{(x+8)(x-7)}+2$$

Powtórnie podnosimy do kwadratu

$$x^2+x-4x-4 = x^2+8x-7x-56+4\sqrt{x^2+8x-7x-56}+4$$

Pierwiastek izolujemy i po raz trzeci podnosimy do kwadratu

$$4\sqrt{x^2+x-56} = 48-4x$$
$$\sqrt{x^2+x-56} = 12-x$$

$$x^2+x-56 = 144-24x+x^2$$
$$25x = 200$$
$$x = 8$$

Sprawdzenie:

$L = \sqrt{8+1}+\sqrt{8-4}-\sqrt{8+8} = \sqrt{9}+\sqrt{4}-\sqrt{16} = 3+2-4 = 1$

$P = \sqrt{8-7} = \sqrt{1} = 1$, a zatem $L = P$

$x = 8$ jest pierwiastkiem danego równania.

Pytania

1. Wymieńcie kolejne czynności przy rozwiązywaniu równania pierwiastkowego zawierającego:
   a) dwa różne wyrażenia pierwiastkowe,
   b) trzy różne wyrażenia pierwiastkowe,
   c) cztery różne wyrażenia pierwiastkowe.

Zadania

1. Rozwiążcie równania:

a) $\sqrt{7-6x}-\sqrt{2x-1} = 0$

b) $3\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+5x+12} = 0$

*c) $2\sqrt{x^2-16} = 3\sqrt{x-1}$

*d) $4\sqrt{x^2-x+3} = \sqrt{15x^2-8x+33}$

2. Rozwiążcie równania:

a) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-4} = 1$

b) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6} = 5$

c) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}-7 = 0$

d) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3} = 2$

e) $\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x-2} = 3$

*f) $2\sqrt{6-2x}-\sqrt{5-4x} = 3$

*g) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x} = 3$

*h) $\sqrt{13-x}+\sqrt{x} = 5$

i) $\sqrt{3x}-\sqrt{3x-5} = 1$

*j) $3\sqrt{6-x}-\sqrt{3-x} = 5$

3. Rozwiążcie równania:

a) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}-2\sqrt{x+1}=0$

*b) $\sqrt{9-x}+\sqrt{x-7}=\sqrt{x-4}$

*c) $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-3}-\sqrt{3x+3}=0$

*d) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}-\sqrt{9x+4}=0$

*e) $\sqrt{10-x}-\sqrt{4-3x}=2\sqrt{x}$

*f) $2\sqrt{2x-5}-\sqrt{x+9}=\sqrt{3x-17}$

**4. Rozwiążcie równania:

a) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x-18}-\sqrt{x+3}+\sqrt{x-13}=0$

b) $\sqrt{11-x}+\sqrt{18-x}-\sqrt{27-x}-\sqrt{6-x}=0$

c) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-2}$

Odpowiedzi

1. a) 1, b) 1 i 3, c) 5, d) 3 i 5.

2. a) 10, b) 3, c) 15, d) 4 i 12, e) 1, f) -5 i 1, g) 1, h) 4 i 9, i) 3, j) 2 i $2\frac{15}{16}$.

3. a) 3, b) $7\frac{1}{5}$ i 8, c) 2, d) 5, e) $\frac{9}{13}$ i 1, f) 7 i 27.

4. a) 22, b) 2, c) 3.

LEKCJE 58 i 59

O funkcji i jej wykresie

W klasach niższych poznaliście pojęcie funkcji i jej obrazu graficznego. Wiadomości te — jako podstawę dalszej pracy — powtórzymy krótko na przykładach.

Przykład 1. Wyznaczyć wartość materiału wyprodukowanego w ilości x m po 40 zł za 1 m.

Oznaczając wartość materiału przez y, otrzymujemy wzór

$$y = 40x$$

Wzór ten określa zależność, jaka istnieje między dwiema wielkościami: wartością materiału y i jego ilością x. Wielkości te nazywać

będziemy zmiennymi, ponieważ mogą one przyjmować różne wartości. Wartość zmiennej x jest na ogół dowolna (uwarunkowana jednak treścią zadania, na przykład w rozważanym zadaniu musi być $x \geqslant 0$), wartość zaś y jest uzależniona od wartości x. Dlatego też x nazywamy zmienną niezależną, a y zmienną zależną.

Wzór $y = 40x$ pozwala nam obliczyć wartość y dla każdej dowolnej wartości zmiennej x, przy tym jednej wartości x odpowiada tylko jedna wartość y.

Obierzmy kilka wartości zmiennej x, obliczmy odpowiadające wartości zmiennej y i otrzymane wyniki zanotujmy w poniższej tabeli:

x (m)	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5
y (zł)	20	40	60	80	120	140	160	180	200

Przyjmiemy określenie:

Zmienną y nazywamy funkcją zmiennej niezależnej x, jeżeli między zmiennymi x i y jest ustalony taki związek, że każdej wartości zmiennej x odpowiada jedna tylko wartość zmiennej y.

W naszym przykładzie powiemy, że wartość materiału y jest funkcją jego ilości x.

Przykład 2. Wyznaczyć pole kwadratu, którego długość boku wynosi x cm. Oznaczając pole kwadratu przez y, otrzymujemy wzór

$$y = x^2$$

który określa zależność między bokiem kwadratu i jego polem. Zmienna x może przybierać dowolne wartości dodatnie, przy czym każdej wartości x odpowiada jedna tylko wartość y. Powiemy więc, że pole y kwadratu jest funkcją jego boku x.

Zmienność tej funkcji ilustruje tabela:

x	1	2	4	5	7	11	15	18	...
y	1	4	16	25	49	121	225	324	...

W tabeli tej ograniczyliśmy się do kilku wartości zmiennej x i dla nich obliczyliśmy odpowiadające wartości funkcji. Rozszerzenie tabeli nie sprawiłoby nam oczywiście żadnej trudności.

Tabelę wartości funkcji obliczoną na podstawie wzoru, którym ta funkcja jest określona, nazywamy tablicą matematyczną.

Przykład 3. W fizyce spotykamy się często z tablicami, w których dane liczbowe zostały uzyskane na drodze pomiarów doświadczalnych. Takie tablice nazywamy fizycznymi.

Poniższa tablica ilustruje nam zależność, jaka istnieje między średnim ciśnieniem atmosferycznym H i wysokością wzniesienia h nad poziomem morza.

h (m)	0	250	500	750	1000	2000	3000
H (mm sł. rtęci)	760	738	716	695	674	596	526

W tablicy tej występują dwie zmienne: zmienna niezależna h (wysokość) i zmienna zależna H (średnie ciśnienie atmosferyczne), przy czym każdej wartości h odpowiada jedna tylko wartość H. Średnie ciśnienie atmosferyczne H jest funkcją wysokości wzniesienia h nad poziomem morza.

Podkreślamy, że w odróżnieniu od przykładów 1 i 2 zależność funkcyjna przedstawiona jest tu nie przez wzór, lecz w postaci tablicy fizycznej.

Wprowadzając pojęcie funkcji mówiliśmy, że zmienna niezależna x może przybierać wartości na ogół dowolne. Często jednak z natury rozważanego zagadnienia wynikają pewne ograniczenia zakresu zmienności x. Tak np. przypominamy, że w przykładzie 1 zmienna x nie może przybierać wartości ujemnych, bo ilość materiału nie może być mniejsza od zera.

W niektórych wypadkach samo określenie funkcji przez wzór zmniejsza zakres zmienności x.

Weźmy na przykład funkcje:

1) $y = \frac{5}{x^2-4}$ 2) $y = \sqrt{x-4}$ i 3) $y = \sqrt{25-x^2}$

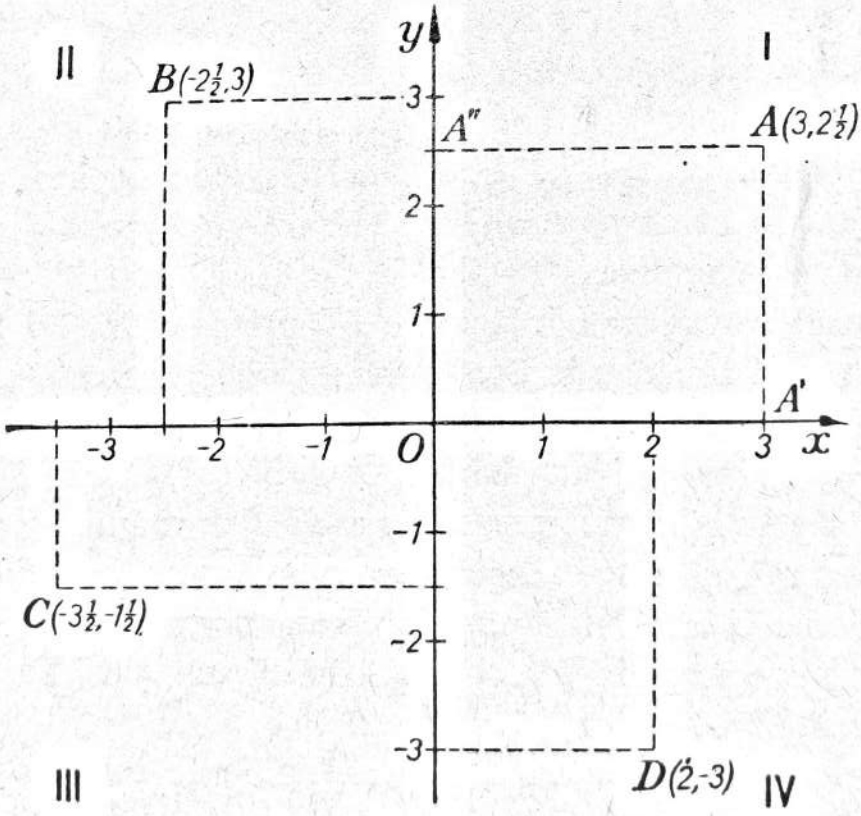
Funkcje te są określone dla tych wartości zmiennej x, przy których wzory mają sens liczbowy.

Pierwsza funkcja jest określona dla wszystkich wartości x z wyjątkiem $x = -2$ i $x = +2$, druga dla wartości x spełniających warunek $x \geqslant 4$ i trzecia dla x spełniających warunek $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

Wykres funkcji

Do tej pory przedstawialiśmy zmienność funkcji za pomocą tabeli wartości funkcji. Z kursu kl. VII wiemy, że zmienność funkcji może być również zobrazowana za pomocą wykresu w układzie współrzędnych.

Układem współrzędnych nazywamy zespół dwu osi wzajemnie prostopadłych. Punkt O przecięcia się osi nazywamy początkiem układu. Zwykle oś poziomą nazywamy osią OX, a oś pionową OY. Osie te dzielą płaszczyznę na cztery ćwiartki ponumerowane tak, jak wskazuje rysunek 84.



Rys. 84

Jak wiemy, każdemu punktowi na płaszczyźnie układu współrzędnych odpowiadają dwie liczby zwane współrzędnymi punktu, przy czym jedną współrzędną nazywamy odciętą, a drugą — rzędną.

Odcięta punktu jest to — opatrzona odpowiednim znakiem — odległość tego punktu od osi OY.

Rzędna punktu jest to — opatrzona odpowiednim znakiem — odległość tego punktu od osi OX.

Punkt A ma odciętą $+3$, rzędną $+2\frac{1}{2}$, co notujemy $A\left(3,\ 2\frac{1}{2}\right)$

Punkt B ma odciętą $-2\frac{1}{2}$, rzędną $+3$, co notujemy $B\left(-2\frac{1}{2},\ 3\right)$

Punkt C ma odciętą $-3\frac{1}{2}$, rzędną $-1\frac{1}{2}$, co notujemy $C\left(-3\frac{1}{2},\ -1\frac{1}{2}\right)$

Punkt D ma odciętą $+2$, rzędną -3, co notujemy $D(2,\ -3)$

Z rysunku 84 widzimy, że $A''A = OA'$ i $A'A = OA''$.

Odciętą zatem odczytujemy na osi OX i oznaczamy ją przez x.

W związku z tym oś OX nazywamy osią odciętych.

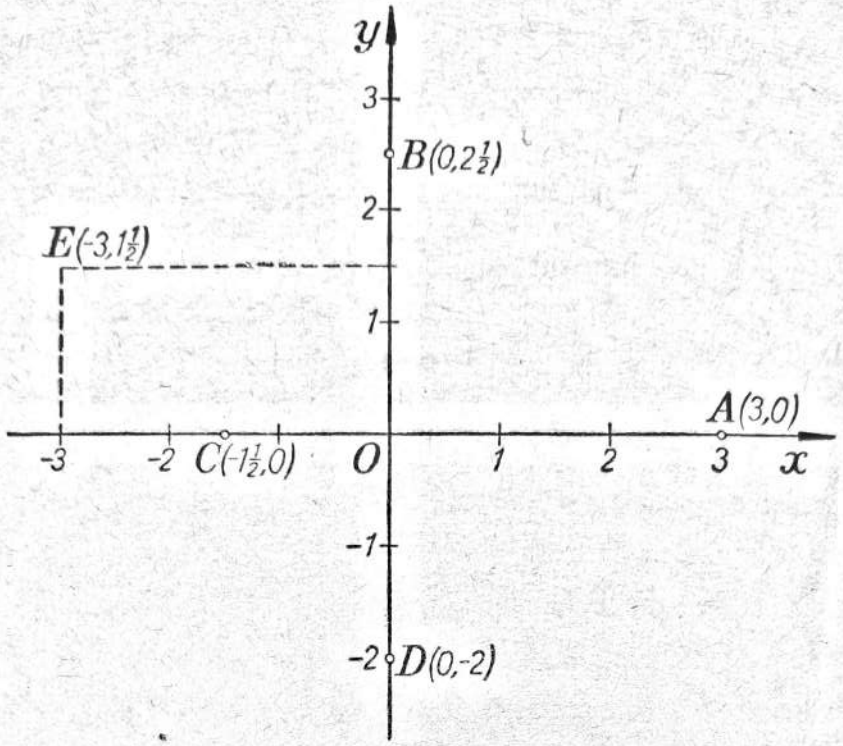
Rzędną odczytujemy na osi OY i oznaczamy ją przez y, a oś OY nazywamy osią rzędnych.

Zależnie od położenia punktu na płaszczyźnie układu, współrzędne jego mają różne znaki, co pokazuje tabelka:

Współrzędne	Ćwiartki			
	I	II	III	IV
x — odcięta	+	−	−	+
y — rzędna	+	+	−	−

Punkty położone na osi OX mają rzędną równą 0, a punkty na osi OY mają odciętą równą zeru. Początek układu ma odciętą i rzędną równe 0 (rys. 85).

Każdemu punktowi na płaszczyźnie układu współrzędnych odpowiadają dwie liczby będące jego współrzędnymi, ale i odwrotnie każdej parze liczb, np. $\left(-3,\ 1\frac{1}{2}\right)$, odpowiada punkt, dla którego pierwsza liczba jest odciętą, a druga rzędną.



Rys. 85

Aby odnaleźć punkt $\left(-3,\ 1\frac{1}{2}\right)$, odkładamy na ujemnej części osi OX odcinek równy 3 jednostkom, a na dodatniej części osi OY odcinek równy $1\frac{1}{2}$ jednostki i z końców tych odcinków wystawiamy prostopadłe do osi OX i OY. Punkt E przecięcia się tych prostopadłych jest punktem poszukiwanym.

Wykres funkcji

Weźmy funkcję

$$y = -2x+3$$

Jest ona określona dla wszystkich wartości zmiennej x.

Aby wykonać wykres tej funkcji, układamy tabelę jej wartości.

x	...	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4	...
y	...	7	5	4	3	1	0	-1	-3	-5	...

Dla każdej pary liczb wziętej z tabelki*) wyznaczamy punkt w układzie współrzędnych (rys. 86).

Łącząc otrzymane punkty linią ciągłą otrzymujemy wykres funkcji.

Jak widzimy z rysunku, wykresem funkcji

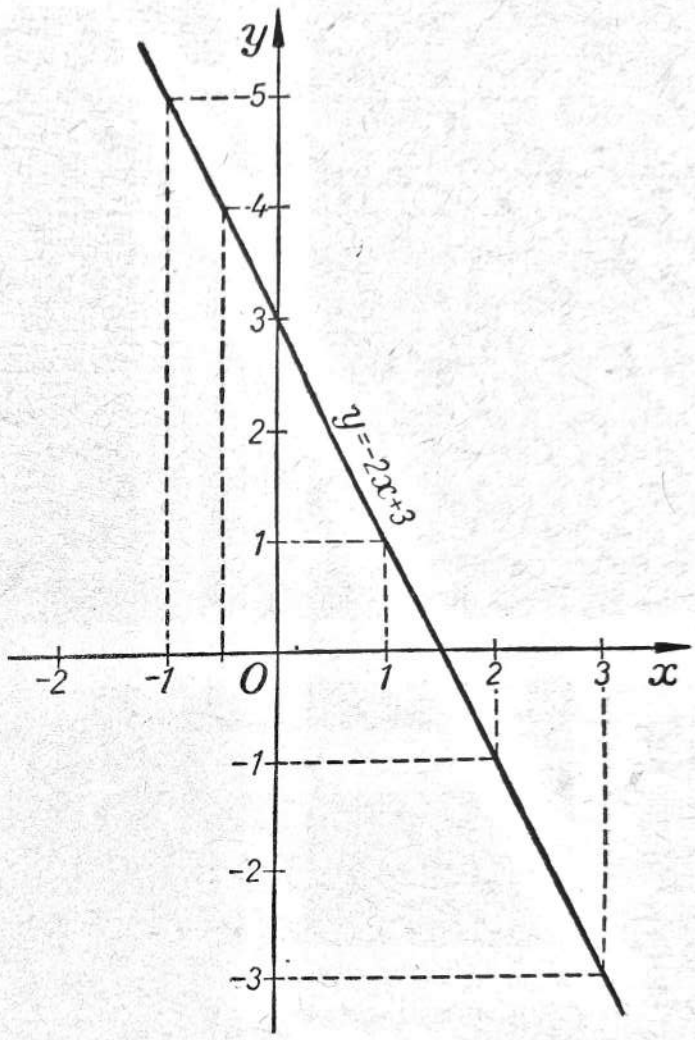
$$y = -2x+3$$

jest linia prosta.

Wykonując wykresy różnych funkcji mających postać

$$y = ax+b$$

gdzie a i b są liczbami danymi, zawsze będziemy otrzymywali linię prostą, podobnie jak dla funkcji $y = -2x+3$.



Rys. 86

Pytania

1. Co nazywamy funkcją? Podajcie kilka przykładów funkcji.
2. Co nazywamy współrzędnymi punktu w układzie współrzędnych? Co nazywamy odciętą, a co rzędną punktu?
3. Jakie znaki mają współrzędne punktu w czterech ćwiartkach?
4. Jaka jest rzędna punktu na osi OX i odcięta punktu na osi OY?
5. Jakie znacie sposoby przedstawiania funkcji?

Zadania

1. Wyraźcie za pomocą wzoru zależność między:
a) obwodem y i bokiem x kwadratu,
b) drogą y i czasem x przy stałej prędkości v km/godz,

*) Tzn. dla par: $(-2, 7)$, $(-1, 5)$, $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ itd.

c) objętością y i krawędzią x sześcianu,

*d) długością y i szerokością x prostokąta o danym polu a cm^2,

*e) obwodem y koła i ilością x jego obrotów na drodze 400 m.

2. Wykreślcie w układzie współrzędnych trójkąt ABC, którego wierzchołki mają współrzędne: $A\left(1, 1\frac{1}{2}\right)$, $B(-4, -1)$, $C\left(3, -4\frac{1}{2}\right)$. Odczytajcie współrzędne punktów, w których boki trójkąta przecinają osie współrzędnych.

3. Dla jakich wartości x określone są funkcje:

a) $y = -3x+1$, b) $y = x^2+5$, c) $y = \frac{1}{x+3}$,

d) $y = \sqrt{x-5}$

4. Ułóżcie tablice wartości funkcji:

a) $y = -x^2+4$ dla $x = -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$

b) $y = \frac{2}{x}$ dla $x = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 8$

5. Wykreślcie funkcje:

a) $y = 3x-5$, b) $y = -2x+1$

Odpowiedzi

1. a) $y = 4x$, b) $y = vx$, c) $y = x^3$, d) $y = \frac{a}{x}$, e) $y = \frac{400}{x}$. **2.** $\left(1\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, 1)$, $(-2, 0)$, $(0, -3)$. **3.** a, b) dla dowolnych wartości x. c) dla dowolnych wartości x z wyjątkiem $x = -3$, d) dla wartości x spełniających warunek $x \geqslant 5$.

LEKCJE 60 i 61

Funkcja liniowa i jej wykres

W poprzedniej lekcji wykreślaliśmy funkcję mającą postać

$$y = ax+b$$

gdzie a i b są stałymi liczbami, zaś x i y zmiennymi.

Stwierdziliśmy, że wykresem tej funkcji jest linia prosta. Dlatego też funkcję tej postaci będziemy nazywali **funkcją liniową**.

Funkcję liniową zbadamy bardziej szczegółowo. Zajmiemy się najpierw przypadkiem szczególnym, gdy $b = 0$. Wtedy

$$y = ax$$

Jak wiemy, funkcja ta określa nam zależność wprost proporcjonalną między dwiema zmiennymi x i y*).

Wykres funkcji $y = ax$

Wykresem tej funkcji jest linia prosta. Dla narysowania tego wykresu wystarczy więc znaleźć dwa punkty, przez które ta prosta przechodzi.

W tym celu zauważmy, że

$$\text{dla} \quad x = 0 \quad \text{mamy} \quad y = 0$$

i

$$\text{dla} \quad x = 1 \quad \text{mamy} \quad y = a$$

Możemy więc powiedzieć:

Wykresem funkcji $y = ax$ jest linia prosta przechodząca przez początek układu O (0, 0) i przez punkt o współrzędnych (1, a). Wykreślmy funkcję $y = ax$ dla różnych wartości współczynnika a, na przykład:

$$y = \frac{1}{4}x, \quad y = x, \quad y = 3x \quad (a > 0, \text{ rys. } 87)$$

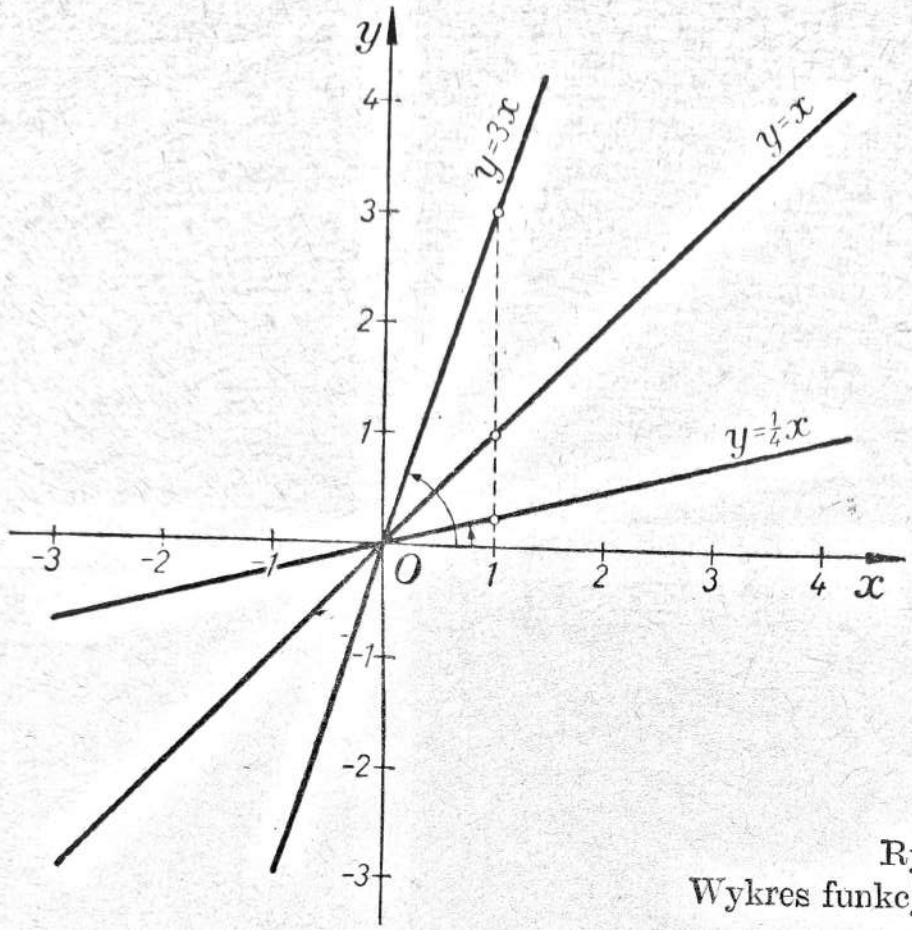
oraz $y = -\frac{1}{4}x, \quad y = -x, \quad y = -3x \quad (a < 0, \text{ rys. } 88)$

---

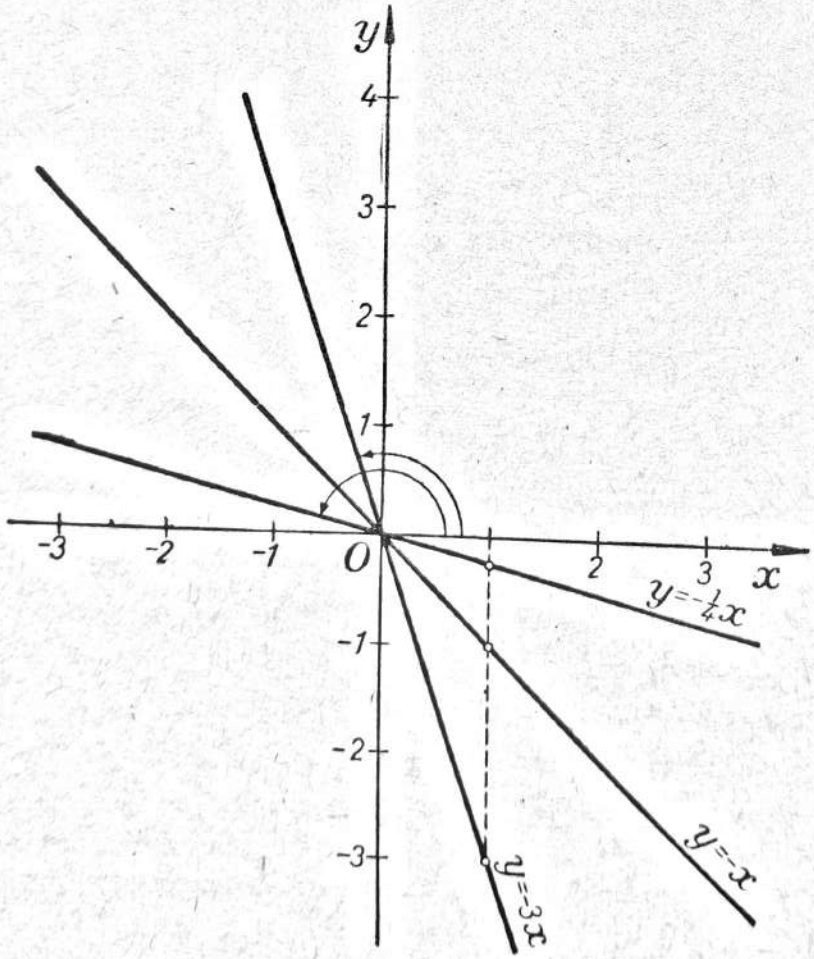
*) Weźmy dla przykładu funkcję daną wzorem $y = 5x$. Ze wzoru tego wynika, że gdy zmienna x wzrasta (lub maleje), wówczas zmienna y wzrasta (lub maleje) w tym samym stosunku. Na przykład

$$x = 2 \quad \text{to} \quad y = 10$$
$$x = 6 \quad \text{to} \quad y = 30$$

Trzykrotny wzrost zmiennej x powoduje trzykrotny wzrost zmiennej y. Czterokrotny wzrost zmiennej x spowodowałby czterokrotny wzrost zmiennej y itd. Tak więc wzór $y = 5x$ istotnie określa zależność wprost proporcjonalną między zmiennymi x i y.



Rys. 87
Wykres funkcji $y = ax$ dla $a > 0$



Rys. 88
Wykres
funkcji $y = ax$ dla $a < 0$

Na podstawie otrzymanych wykresów wnioskujemy, że:

1. Jeżeli $a > 0$, to prosta przechodzi przez ćwiartkę I i III, a zatem tworzy z dodatnią częścią osi Ox kąt ostry.

2. Jeżeli $a < 0$, to prosta przechodzi przez ćwiartkę II i IV, a zatem tworzy z dodatnią częścią osi Ox kąt rozwarty.

Wykres funkcji $y = ax+b$

Rozpatrzmy dwie funkcje:

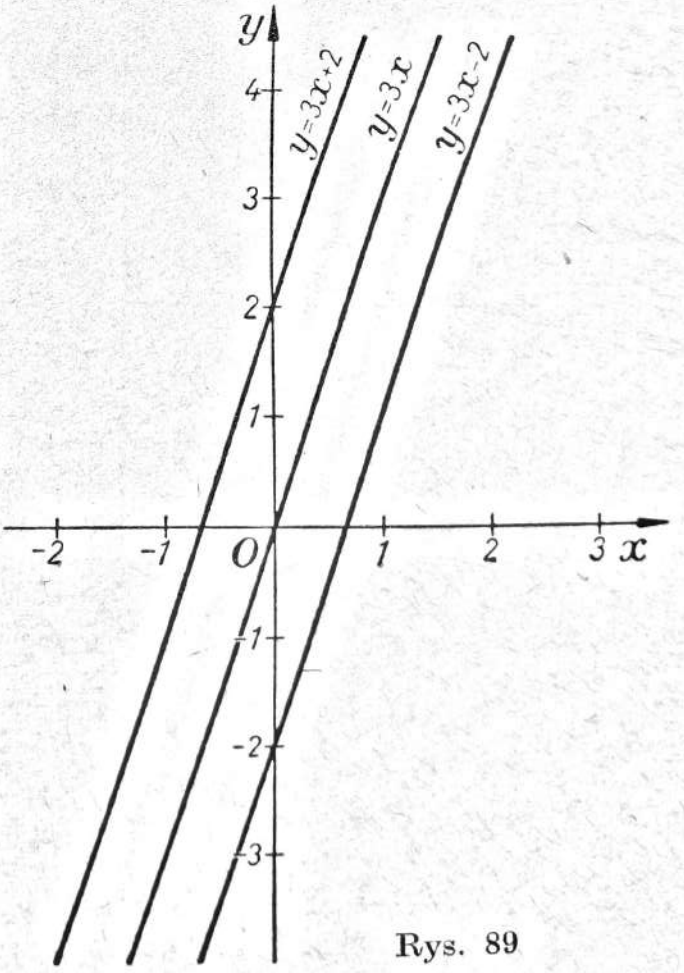
$$\text{I. } y = 3x+2 \quad \text{oraz} \quad \text{II. } y = 3x-2$$

i porównajmy je z funkcją mającą postać

$$y = 3x$$

Spostrzegamy, że dla tych samych wartości zmiennej x wartości funkcji $y = 3x+2$ są stale większe o 2, a wartości funkcji $y = 3x-2$ stale mniejsze o 2 od wartości funkcji $y = 3x$.

Geometrycznie oznacza to, że dla tych samych odciętych x rzędne punktów wykresu funkcji $y = 3x+2$ są stale większe o 2, a funkcji $y = 3x-2$ stale mniejsze o 2 od odpowiednich rzędnych punktów wykresu funkcji $y = 3x$.



Rys. 89

Stąd wniosek: Wykresy funkcji: I. $y = 3x+2$ i II. $y = 3x-2$ otrzymujemy, przesuwając prostą $y = 3x$ równolegle do osi OY:

I. o dwie jednostki w kierunku dodatnim (w górę).

II. o dwie jednostki w kierunku ujemnym (w dół).

Prosta $y = 3x+2$ przecina oś OY w punkcie $(0, 2)$.

Prosta $y = 3x-2$ przecina oś OY w punkcie $(0, -2)$.

Możemy więc ogólnie powiedzieć:

Wykresem funkcji $y = ax+b$ jest linia prosta równoległa do prostej $y = ax$ i przecinająca oś OY w punkcie, którego rzędna równa się wyrazowi wolnemu b.

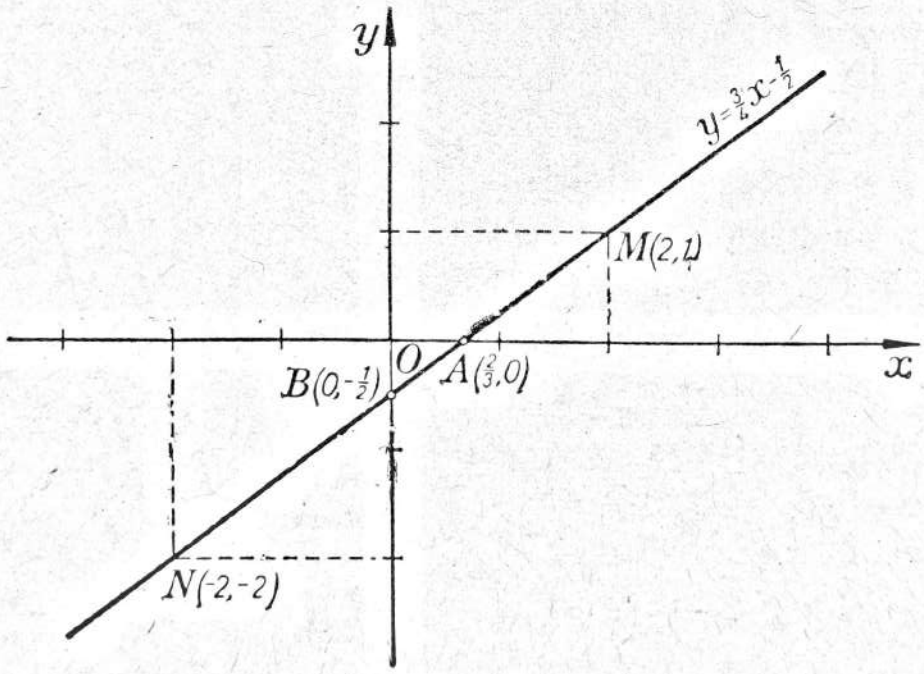
Równanie $y = ax+b$ nazywamy równaniem tej prostej.

W praktyce wygodniej jest stosować inny sposób wykreślania funkcji liniowej. Polega ona na znalezieniu dwu dowolnych punktów, przez które przechodzi prosta. W tym celu przyjmujemy dwie dowolne wartości x i obliczamy odpowiednie wartości y. Wykreślmy np. funkcję

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

Dla $x = 2$ mamy $y = 1$, a dla $x = -2$ mamy $y = -2$.

Prosta będąca wykresem funkcji $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ przechodzi więc przez dwa punkty (2, 1) i (−2, −2).



Rys. 90

Wyraz wolny $-\frac{1}{2}$ funkcji $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ oznacza na wykresie rzędną punktu B przecięcia prostej z osią OY (rys. 90).

Punkt A przecięcia prostej z osią OX jest punktem, którego

rzędna y równa się 0. Odciętą tego punktu możemy więc obliczyć, rozwiązując równanie

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = 0$$

skąd otrzymamy $x = \frac{2}{3}$ (sprawdźcie!).

Wynik ten zgadza się z rys. 90, z którego widać wyraźnie, że odcięta punktu A równa się $\frac{2}{3}$.

Wartość $x = \frac{2}{3}$ jest taką wartością zmiennej x, przy której rozważana funkcja przybiera wartość 0. Taką wartość zmiennej x nazywamy **miejscem zerowym** funkcji.

Zapamiętajcie określenie:

OKREŚLENIE. **Miejsce zerowe funkcji** jest to ta wartość zmiennej niezależnej x, przy której zmienna zależna y (czyli funkcja) przybiera wartość zero.

Ujmując to zagadnienie ze stanowiska geometrycznego powiemy, że miejsce zerowe funkcji jest to odcięta tego punktu, w którym linia będąca wykresem funkcji przecina oś OX.

*Przypadki szczególne funkcji liniowej

W funkcji liniowej $y=ax+b$ załóżmy, że $a = 0$. Otrzymamy

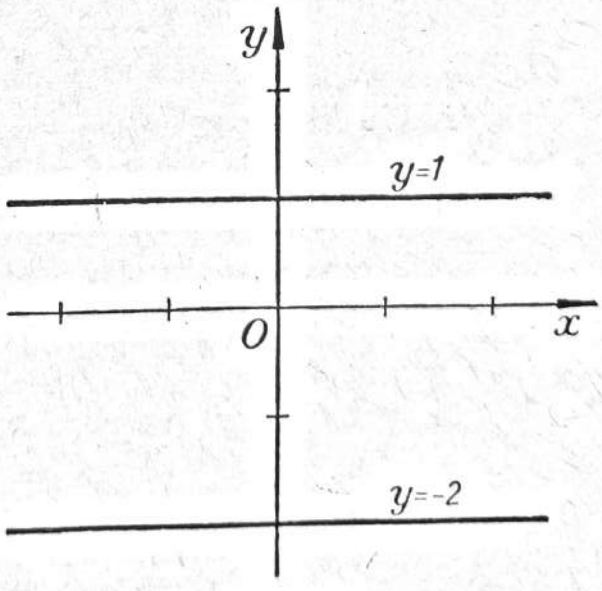
$$y = 0 \cdot x + b$$

czyli $$y = b$$

W tym wypadku dla wszystkich wartości zmiennej x funkcja przybiera stale tę samą wartość b.

Mówimy wtedy, że funkcja $y = b$ jest stała.

Wykresem funkcji stałej $y=b$ jest prosta równoległa do osi OX i przecinająca oś OY w punkcie(0,b)

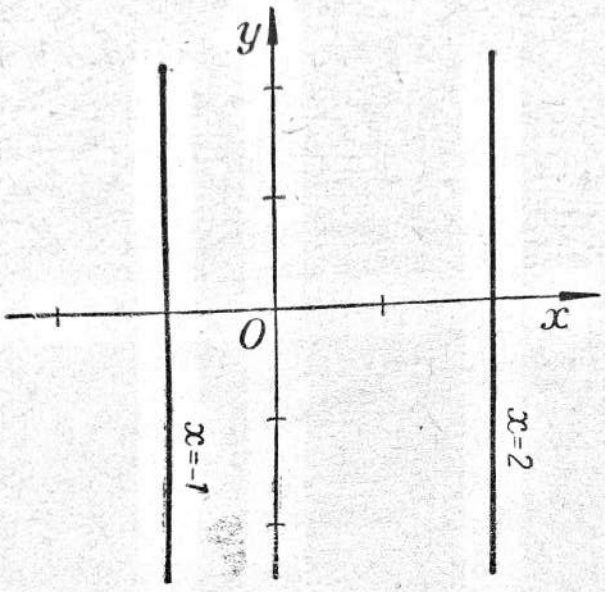


Rys. 91

Jeżeli w równaniu $y = b$ założymy, że $b = 0$, to na wykresie otrzymamy prostą pokrywającą się z osią OX.

A więc $y = 0$ jest równaniem osi OX.

Analogicznie możemy powiedzieć: Wykresem równania $x = m$ jest prosta równoległa do osi OY i przecinająca oś OX w punkcie $(m, 0)$.



Rys. 92

Jeśli w równaniu $x = m$ założymy, że $m = 0$, to na wykresie otrzymamy prostą pokrywającą się z osią OY.

A więc $x = 0$ jest równaniem osi OY.

Pytania

1. Wyjaśnijcie, dlaczego funkcję postaci $y = ax+b$ nazywamy funkcją liniową.
2. Co przedstawia na wykresie funkcja $y = ax$?
3. Jakie jest znaczenie współczynnika a?
4. Jakie znacie sposoby wykreślania funkcji $y = ax+b$? Omówcie je na przykładzie $y = \frac{1}{2}x - 5$.
5. Jak położone są względem siebie dwie proste będące wykresami funkcji

$$y = 5x-7 \quad \text{i} \quad y = 5x+1$$

6. Jakie znaczenie geometryczne ma wyraz wolny b?
7. Co nazywamy miejscem zerowym funkcji $y = ax+b$?

Zadania

1. Wykreślcie następujące funkcje:

a) $y = -\frac{1}{3}x$,

b) $y = x+3$

c) $y = 3x-4$

*d) $y = -1$

e) $y = -2x+1$

*f) $x = 4$

*g) $y = 2\frac{1}{2}$

*h) $x = -1\frac{1}{2}$

*i) $y = -x-2$

*j) $y = -x+4$

*k) $y = x+1$

*l) $y = -5x-1$

2. Nie wykreślając powiedzcie, przez jakie ćwiartki przechodzą proste:

a) $y = 2x+7$

b) $y = -4x-6$

c) $y = -3x+5$

*d) $y = 6$

e) $y = \frac{1}{2}x-6$

*f) $y = -7$

*g) $x = 5$

*h) $x = -4$

3. Wykreślcie funkcję $y = -3x+2$ i z wykresu odczytajcie wartości tej funkcji dla:

a) $x = -1$, b) $x = -\frac{1}{2}$, c) $x = 3$

***4.** Napiszcie równanie prostej równoległej do prostej $y = 2x-3$ i przechodzącej przez punkt (0, 7).

5. Obliczcie miejsce zerowe funkcji:

a) $y = -2x+5$

b) $y = 3x+4$

c) $y = 5x$

*d) $y = -x+3$

*e) $y = -7x$

*f) $y = -4x-6$

****6.** Napiszcie równanie prostej równoległej do prostej $y = -3x+6$ i przechodzącej przez punkt $(-1, 0)$.

2. a) I, II, III, b) II, III, IV, c) II, I, IV, d) I, II, e) I, IV, III, f) III i IV, g) I, IV, h) II i III. 4. $y = 2x+7$. 5. a) $\frac{5}{2}$, c) 0, f) $-\frac{3}{2}$. 6. $y = -3x-3$. Wskazówka: $a = -3$ oraz $-\frac{b}{a} = -1$.

LEKCJE 62 i 63

Rozwiązywanie algebraiczne i graficzne układu dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi

W klasie VIII zajmowaliśmy się rozwiązywaniem układu dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi, na przykład

$$\begin{cases} 5x-3y = 2 \\ 7x+5y = 12 \end{cases}$$

Wiemy, że rozwiązać układ dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi znaczy znaleźć taką parę liczb x i y, które wstawione w miejsce niewiadomych zmieniają równania w równości prawdziwe. O parze takiej mówimy, że **spełnia** dany układ.

Para liczb spełniających układ nazywa się jego **rozwiązaniem.** Poznaliśmy dwie metody rozwiązywania układów równań:

1) metodę podstawiania,
2) metodę przeciwnych współczynników.

Powtórzmy je krótko.

1. Metoda podstawiania

Weźmy układ równań

$$\begin{cases} 2x+3y = 3 \\ 7x-6y = 27 \end{cases}$$

Wyznaczmy z któregokolwiek równania jedną z niewiadomych

w zależności od drugiej, na przykład z pierwszego równania wyznaczamy y w zależności od x.
Otrzymamy

$$3y = 3-2x$$

$$y = \frac{3-2x}{3}$$

Wyrażenie $\frac{3-2x}{3}$ wstawiamy do równania drugiego na miejsce niewiadomej y

$$7x-6\cdot\frac{3-2x}{3} = 27$$

Doszliśmy do równania z jedną niewiadomą. Wykonujemy kolejne przekształcenia:

$$7x-2(3-2x) = 27$$

$$7x-6+4x = 27$$

$$11x = 33$$

skąd $$x = 3$$

Aby obliczyć wartość y, wstawiamy otrzymaną wartość x do równania

$$y = \frac{3-2x}{3}$$

skąd $$y = \frac{3-6}{3} = -1$$

Otrzymaliśmy parę liczb $x = 3$ i $y = -1$. Aby przekonać się, czy stanowi ona rozwiązanie danego układu, wykonujemy sprawdzenie.

$L_1 = 2\cdot 3+3(-1) = 6-3 = 3$
$P_1 = 3$, a zatem $L_1 = P_1$
$L_2 = 7\cdot 3-6(-1) = 21+6 = 27$
$P_2 = 27$, a zatem $L_2 = P_2$

Sprawdzenie wykazuje, że para liczb $x = 3$ i $y = -1$ jest rozwiązaniem danego układu równań.

2. Metoda przeciwnych współczynników

Weźmy ten sam układ równań

$$\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 7x-6y=27 \end{cases}$$

Obie strony każdego z równań mnożymy przez takie liczby, aby otrzymać przeciwne współczynniki przy jednej z niewiadomych. Ponieważ współczynnikami przy y są 3 i -6, wystarczy więc obie strony pierwszego równania pomnożyć przez 2. Otrzymamy:

$$\begin{cases} 4x+6y=6 \\ 7x-6y=27 \end{cases}$$

Dodając równania stronami, mamy:

$$11x=33$$

skąd

$$x=3$$

Chcąc obliczyć wartość niewiadomej y, wstawiamy otrzymaną wartość $x=3$ do któregokolwiek równania danego układu, np. do pierwszego.

$$2\cdot 3+3y=3$$
$$y=-1$$

Otrzymaliśmy parę liczb $x=3$ i $y=-1$, o której poprzednio już przekonaliśmy się, że stanowi ona rozwiązanie danego układu.

Układ dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi mający jedno rozwiązanie nazywamy **układem oznaczonym.**

Przejdziemy teraz do graficznego rozwiązywania układu równań. Rozważmy chwilowo pierwsze równanie

(A) $$2x+3y=3$$

i wyznaczmy z niego y w zależności od x:

(B) $$y=-\frac{2}{3}x+1$$

Jeśli założymy, że: $x = -3$, to $y = 3$

$x = 0$, to $y = 1$

$x = 3$, to $y = -1$

$x = 4$, to $y = -1\frac{2}{3}$

Jak widzimy pary liczb -3 i 3, 0 i 1, 3 i -1, itd. spełniają równanie (B), a więc i równanie (A), są zatem ich rozwiązaniem. Par takich jest nieskończenie wiele, zatem równanie stopnia pierwszego o dwóch niewiadomych ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Ponieważ dla każdej wartości x znajdziemy jedną wartość y, możemy powiedzieć, że równanie (A) określa funkcję liniową

(B) $$y = -\frac{2}{3}x+1$$

O prostej, która jest wykresem tej funkcji, powiemy, że jest ona wykresem równania

(A) $$2x+3y = 3$$

Stąd wnioski:

1) każda para wartości x i y spełniająca równanie $2x+3y = 3$ stanowi współrzędne punktu wykresu funkcji $y = -\frac{2}{3}x+1$

2) i odwrotnie współrzędne każdego punktu wykresu funkcji $y = -\frac{2}{3}x+1$ są rozwiązaniami równania $2x+3y = 3$. Uogólniając możemy powiedzieć:

Wykresem równania o dwu zmiennych x i y jest miejsce geometryczne punktów, których współrzędne spełniają dane równanie.

Przykład 1. Rozpatrzmy układ równań

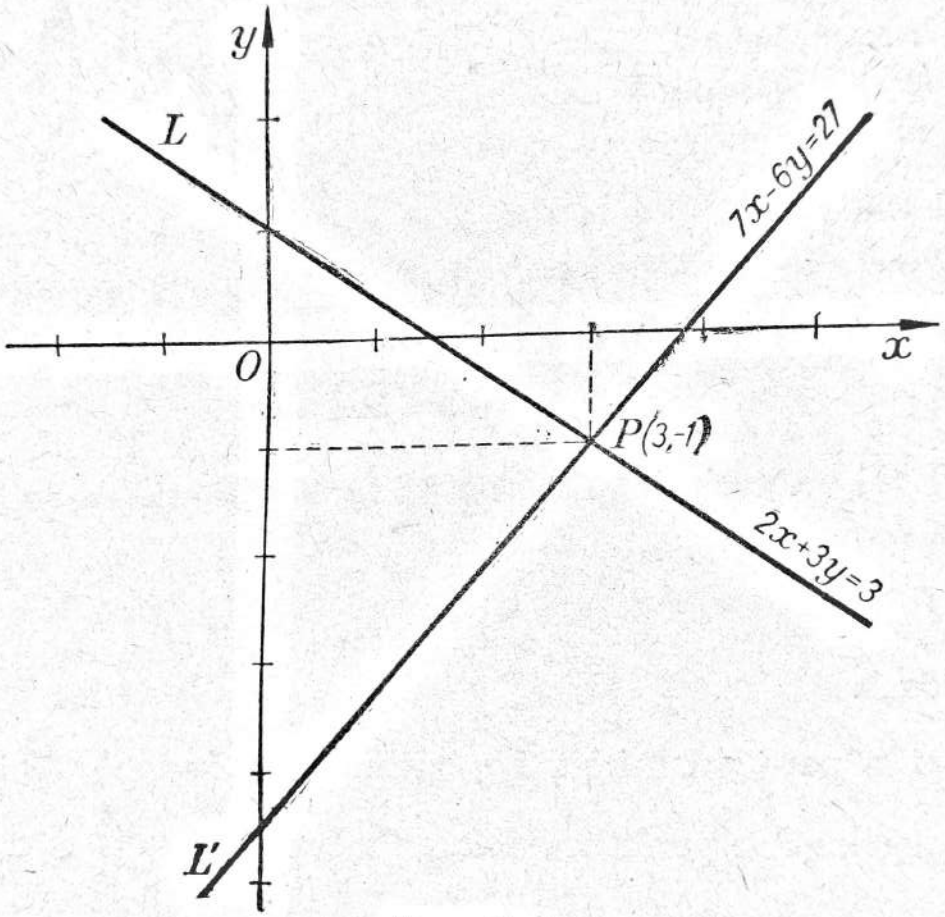
$$\begin{cases} 2x+3y = 3 \\ 7x-6y = 27 \end{cases}$$

Równania te określają dwie funkcje liniowe:

$$y = -\frac{2}{3}x + 1$$

$$y = \frac{7}{6}x - 4\frac{1}{2}$$

Wykreślmy te funkcje (rys. 93).



Rys. 93

Otrzymaliśmy na wykresie dwie proste przecinające się w punkcie P o współrzędnych $x = 3$ i $y = -1$. Zanalizujemy ten wynik.

Prosta L jest miejscem geometrycznym punktów, których współrzędne spełniają równanie $2x+3y = 3$.

Prosta L' jest miejscem geometrycznym punktów, których współrzędne spełniają równanie $7x-6y = 27$.

Punkt P przecięcia tych prostych jest punktem należącym zarówno do jednej, jak i do drugiej prostej, a zatem jego współrzędne spełniają oba równania danego układu, są więc rozwiązaniem tego układu.

Powiemy więc:

Ilustracją graficzną układu oznaczonego dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi są dwie proste przecinające się w jednym punkcie, którego współrzędne są rozwiązaniem danego układu.

Przykład 2. Rozwiązać algebraicznie i graficznie układ równań

$$\begin{cases} 10x-6y = 15 \\ 5x-3y = -3 \end{cases}$$

Przypuśćmy, że istnieją wartości x i y spełniające dany układ.

Zastosujmy metodę przeciwnych współczynników. Obie strony drugiego równania pomnóżmy przez -2 i otrzymane równania dodajmy stronami:

$$\begin{array}{r} 10x-6y = 15 \\ -10x+6y = 6 \\ \hline 0 = 21 \end{array}$$

otrzymujemy

Przypuszczenie, że układ posiada rozwiązanie, doprowadziło nas do sprzeczności. Nie ma więc takich wartości x i y, które spełniałyby ten układ.

Układ dwu równań z dwiema niewiadomymi nie mający rozwiązania nazywamy **układem sprzecznym.**

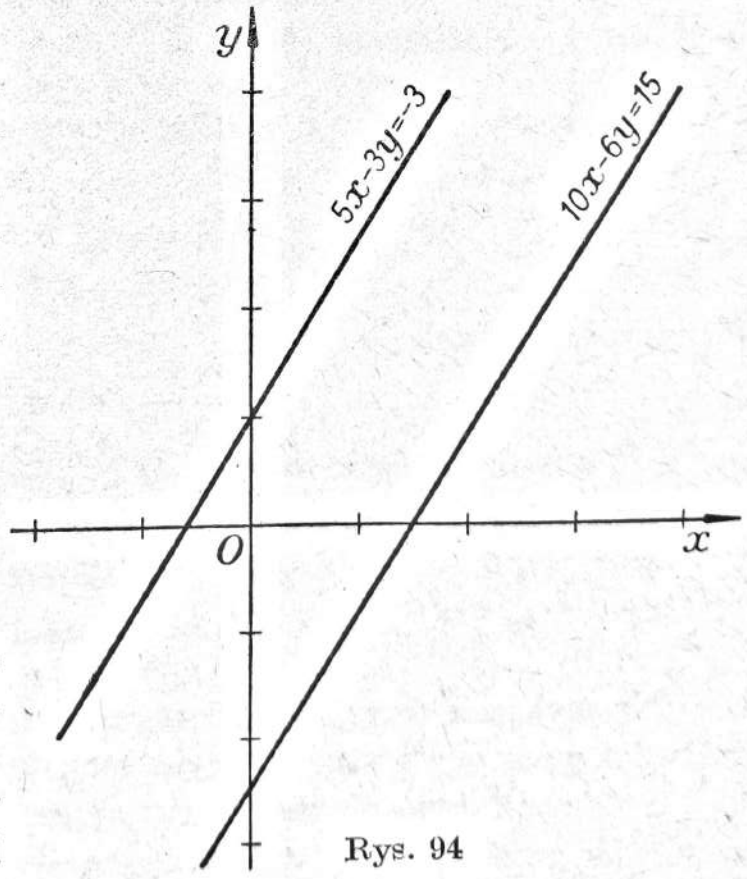
Podamy ilustrację graficzną danego układu. Równania układu określają dwie funkcje

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{5}{3}x + 1$$

Funkcje te wykreślamy w układzie współrzędnych XOY.

Widzimy, że wykresy tych funkcji są prostymi



Rys. 94

równoległymi, nie mają więc punktów wspólnych (rys. 94), co oznacza właśnie, że nie ma liczb, które spełniałyby jednocześnie oba równania układu.

Przykład 3

Rozwiążmy algebraicznie i graficznie układ równań

$$\begin{cases} 2x+y = 4 \\ 6x+3y = 12 \end{cases}$$

Obie strony pierwszego równania pomnóżmy przez -3 i następnie dodajmy równania stronami

$$\begin{cases} -6x-3y = -12 \\ \underline{6x+3y = 12} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy tożsamość. Oznacza to, że każda para wartości x i y spełniających pierwsze równanie spełnia również i drugie równanie. Układ ma więc nieskończenie wiele rozwiązań. Taki układ równań nazywamy **nieoznaczonym.**

Pokażemy ilustrację graficzną tego układu równań. Przekształcając równania

$$\begin{cases} 2x+y = 4 \\ 6x+3y = 12 \end{cases}$$

otrzymujemy funkcje

$$\begin{cases} y = -2x+4 \\ y = -2x+4 \end{cases}$$

Widzimy, że oba równania układu określają jedną i tę samą funkcję

$$y = -2x+4$$

Na wykresie (rys. 95) otrzymamy jedną prostą (mówimy czasem o dwóch prostych pokrywających się).

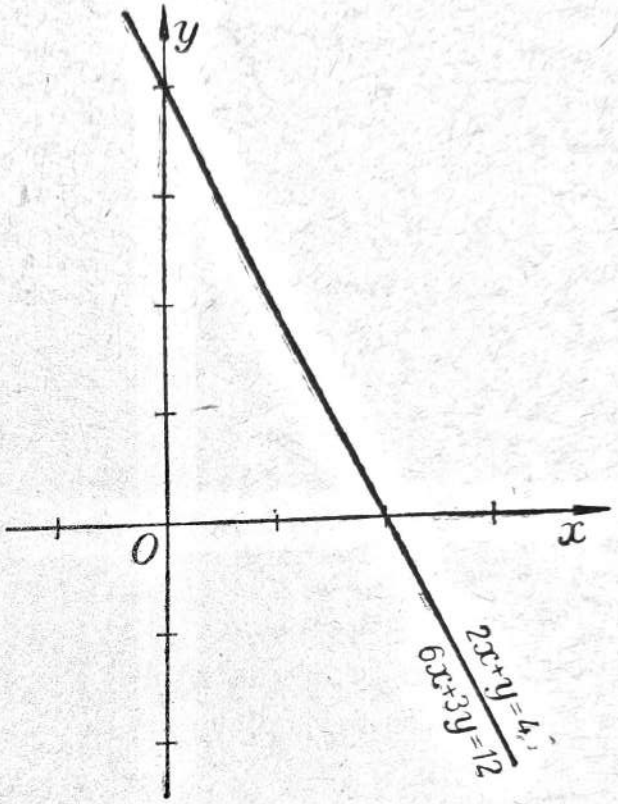
Ponieważ dwie proste pokrywające się mają nieskończenie wiele punktów wspólnych, a współrzędne wspólnych punktów stanowią

rozwiązania układu, więc układ nieoznaczony ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Ilustracją graficzną układu nieoznaczonego dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi są dwie proste pokrywające się.

Pytania

1. Opiszcie sposób postępowania przy algebraicznym rozwiązywaniu układu równań: 1. metodą podstawiania, 2. metodą przeciwnych współczynników.
2. Opiszcie sposób postępowania przy graficznym rozwiązywaniu układu dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.
3. Jaka jest ilustracja graficzna układu dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi w przypadku układu: a) oznaczonego, b) sprzecznego, c) nieoznaczonego?



Rys. 95

Zadania

1. Wykonajcie ilustrację graficzną poniższych układów równań; które z nich są oznaczone, a które sprzeczne lub nieoznaczone? Dla układów oznaczonych odczytajcie rozwiązania.

a) $\begin{cases} 4x+y=5 \\ 3x-4y=18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-4y=8 \\ 3x-6y=-30 \end{cases}$

*c) $\begin{cases} 3x-y=-1 \\ 9x+6y=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x-4y=14 \\ 3x-\frac{12}{7}y=6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x-4y=12 \end{cases}$

*f) $\begin{cases} 4x+y=9 \\ y=5 \end{cases}$

*g) $\begin{cases} y+4x=4 \\ 3y+12x=12 \end{cases}$

*h) $\begin{cases} 2x-3y=10 \\ x=2 \end{cases}$

*i) $\begin{cases} 15x+5y=-5 \\ 6x+2y=14 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x+y=-4 \\ x+y=0 \end{cases}$

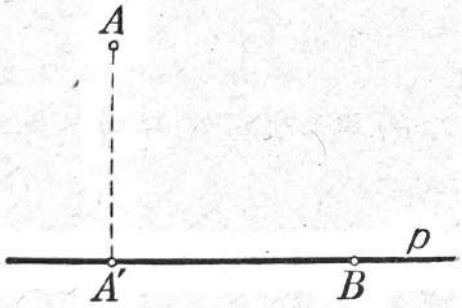
Odpowiedzi

a) (2, −3), b) sprzeczny, c) (0, 1), d) nieoznaczony, e) (3, 0), f) (1, 5), g) nieoznaczony, h) (2, −2), i) sprzeczny, j) (−4, 4).

LEKCJA 64

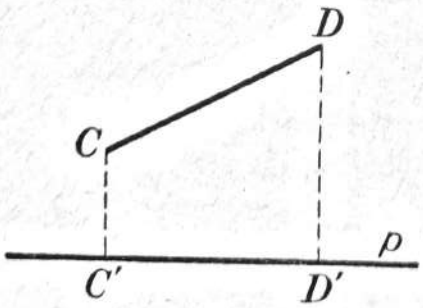
Pierwsze twierdzenie o trójkącie prostokątnym

W trzecim okresie roku szkolnego poznamy trzy ważne twierdzenia o trójkącie prostokątnym i nauczymy się stosować je w zadaniach. Dziś udowodnimy pierwsze z tych twierdzeń. Przedtem jednak przypomnijmy sobie niektóre wiadomości z klasy VIII.

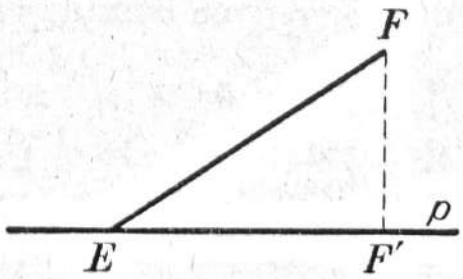


Rys. 96 a

Jeśli z punktu A, leżącego poza prostą p, poprowadzimy prostopadłą do tej prostej, to w przecięciu otrzymamy punkt A', zwany rzutem punktu A na prostą p. Jeśli punkt B leży na prostej p, to mówimy, że sam jest swoim rzutem na tę prostą (rys. 96 a).



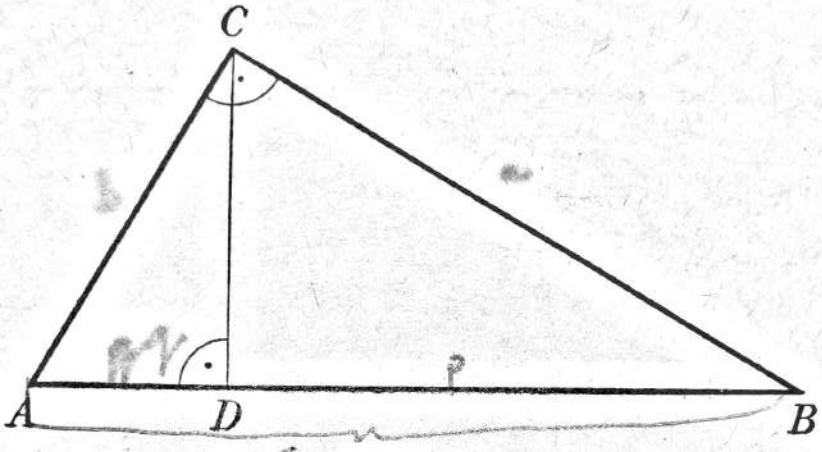
Rys. 96 b



Rys. 96 c

Sposób rysowania rzutu odcinka na prostą pokazują rys. 96b i c. Tak np. mówimy, że rzutem odcinka CD na prostą p jest odcinek $C'D'$, a rzutem odcinka EF na prostą p jest odcinek EF'.

Niech będzie teraz dany trójkąt prostokątny ABC, w którym $\sphericalangle C = 90^0$ (rys. 97). Jak wiadomo, bok AB nazywamy wówczas przeciwprostokątną, boki zaś AC i BC — przyprostokątnymi.



Rys. 97

Jeśli z wierzchołka kąta prostego C opuścimy wysokość CD, wówczas punkt D możemy nazwać rzutem punktu C na przeciwprostokątną AB; odcinek AD możemy uważać za rzut przyprostokątnej AC na przeciwprostokątną AB, a odcinek DB — za rzut przyprostokątnej BC na przeciwprostokątną AB.

Postarajcie się dobrze przyswoić sobie te nazwy, wówczas bez trudu zrozumiecie sens następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 1. **W trójkącie prostokątnym kwadrat przyprostokątnej równa się iloczynowi przeciwprostokątnej przez rzut tej przyprostokątnej na przeciwprostokątną.**

Jeśli miary boków trójkąta ABC oznaczymy odpowiednio przez a, b, c, a miary odcinków AD i DB przez q i p (rys. 98), to chcemy udowodnić, że

$$b^2 = c \cdot q, \quad a^2 = c \cdot p$$

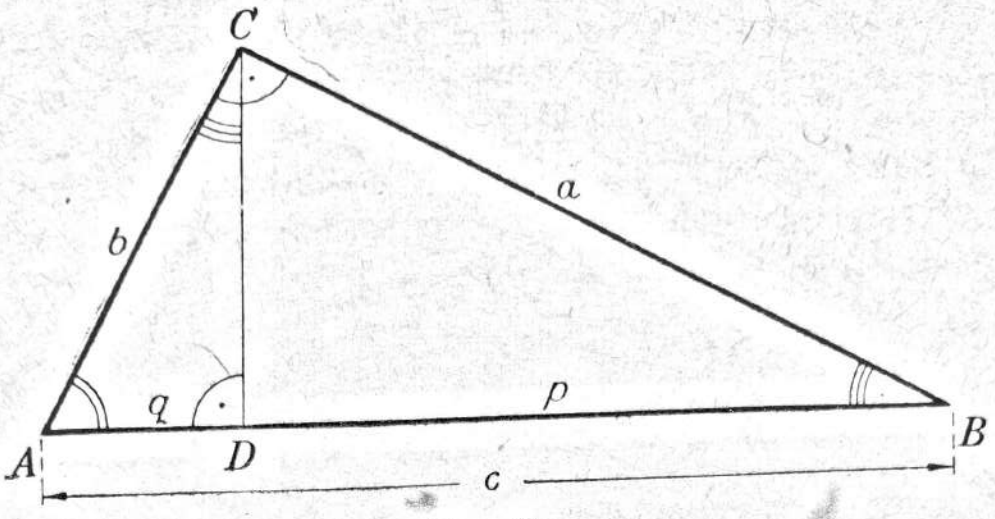
Założenie: W $\triangle ABC$ jest $\sphericalangle C = 90^0$

Teza: $b^2 = c \cdot q$

Dowód. Rozpatrujemy trójkąty $\triangle ADC$ i $\triangle ABC$. Wykażemy, że są to trójkąty podobne. Istotnie, widzimy, że

$\sphericalangle A$ jest kątem wspólnym obu trójkątów,

$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ACB$ (kąty proste)



Rys. 98

Jeśli trójkąty mają po dwa kąty odpowiednio równe, wówczas, jak wiemy, pozostałe kąty tych trójkątów też są równe (dlaczego?). W naszym przypadku

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle B$$

Wobec tego

$$\triangle ADC \sim \triangle ABC$$

na podstawie I cechy podobieństwa trójkątów.

Dostrzegamy dalej, że:
bokowi CD małego trójkąta ADC odpowiada bok BC dużego trójkąta ABC (gdyż obydwa te boki leżą naprzeciw wspólnego kąta A); bokowi AD trójkąta ADC odpowiada bok AC trójkąta ABC (gdyż boki te leżą naprzeciw równych kątów: $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle B$); bokowi AC trójkąta ADC odpowiada bok AB trójkąta ABC (gdyż leżą naprzeciw kątów prostych).

Wyrażając się obrazowo, można by powiedzieć, że największemu bokowi trójkąta ADC odpowiada największy bok trójkąta ABC, najmniejszemu bokowi trójkąta ADC odpowiada najmniejszy bok trójkąta ABC itd.

W trójkątach podobnych odpowiednie boki są proporcjonalne, więc

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

czyli

$$\frac{q}{b} = \frac{b}{c}$$

stąd zaś wynika, że

$$b^2 = c \cdot q \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Podobnie, rozpatrując trójkąty: $\triangle CDB$ i $\triangle ABC$, można dowieść, że

$$a^2 = c \cdot p$$

Uwaga. W proporcji

$$\frac{q}{b} = \frac{b}{c}$$

liczba b powtarza się jako wyraz środkowy.

Wyraz proporcji, który powtarza się jako wyraz środkowy lub jako wyraz skrajny, nazywamy średnią proporcjonalną wyrazów pozostałych.

Wobec tego udowodnione wyżej twierdzenie możemy wypowiedzieć w formie następującej:

W trójkącie prostokątnym przyprostokątna jest średnią proporcjonalną przeciwprostokątnej i rzutu tej przyprostokątnej na przeciwprostokątną.

Pytania

1. Jak nazwaliśmy odcinki AD i DB na rys. 97?
2. Wypowiedzcie twierdzenie udowodnione w tej lekcji.
3. Wykażcie, że $\triangle ADC \sim \triangle ABC$.
4. Wymieńcie boki odpowiednie tych trójkątów.
5. Napiszcie proporcję, z której wynika teza twierdzenia.
6. Co wiecie o średniej proporcjonalnej?
7. Wypowiedzcie omawiane twierdzenie w innej formie.

Zadania

1. Posługując się rys. 98, udowodnijcie, że $a^2 = c \cdot p$.
2. W trójkącie prostokątnym ABC z rys. 98:

a) dane: $c = 4{,}8$; $q = 1{,}2$; obliczyć b.

b) dane: $a = 12$ cm, $p = 8$ cm, obliczyć c.

c) dane: $b = 16$ cm, $c = 32$ cm, obliczyć p i q.

Odpowiedzi

2. a) 2,4, b) 18 cm, c) 24 cm i 8 cm.

LEKCJA 65

Twierdzenie Pitagorasa *)

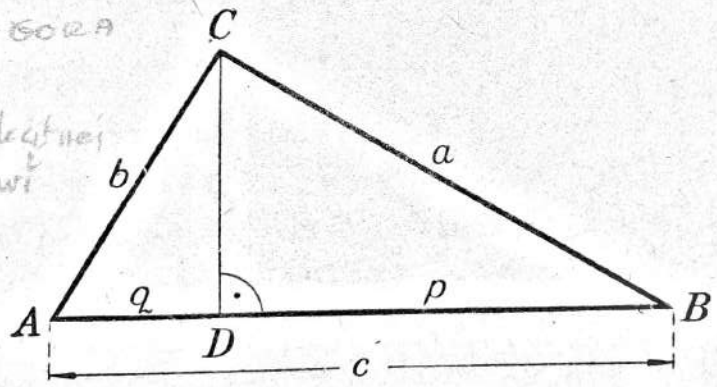
W dzisiejszej lekcji poznamy jedno z najważniejszych twierdzeń geometrii. Przy jego dowodzie będziemy korzystać z twierdzenia poznanego w lekcji poprzedniej.

TWIERDZENIE PITAGORASA. **W trójkącie prostokątnym kwadrat przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów obu przyprostokątnych.**

Niech będzie dany trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle C = 90^0$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (rys. 99).

Założenie: W $\triangle ABC$ jest $\sphericalangle ACB = 90^0$.

Teza: $$c^2 = a^2 + b^2$$



Rys. 99

Dowód. Z poprzedniej lekcji wiemy, że kwadrat przyprostokątnej równa się iloczynowi przeciwprostokątnej przez rzut na nią tej przyprostokątnej, czyli że

$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

Dodając te równości stronami (tzn. sumując lewą stronę pierwszej

*) O Pitagorasie patrzcie przypis na str. 87.

równości z lewą stroną drugiej równości i podobnie postępując ze stronami prawymi) otrzymujemy równość

$$a^2+b^2 = c \cdot p+c \cdot q$$

Teraz po prawej stronie wyłączamy przed nawias wspólny czynnik c

$$a^2+b^2 = c(p+q)$$

i wyrażenie w nawiasach zestawiamy z rysunkiem 99. Widzimy, że $p+q = c$.

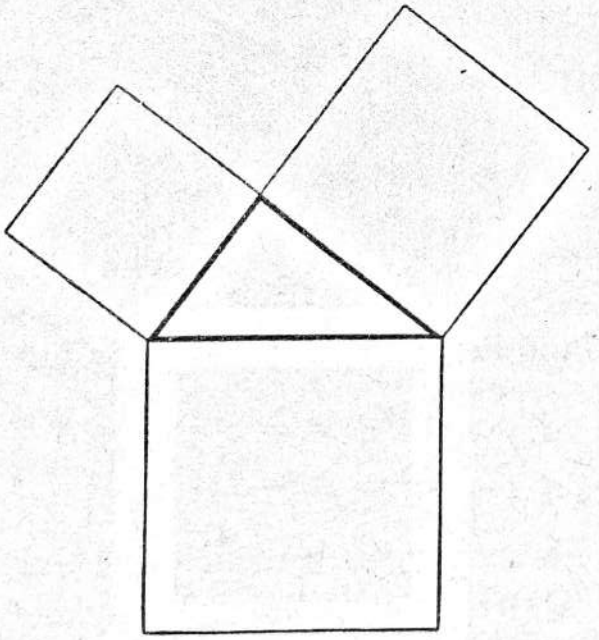
Wobec tego

$$a^2+b^2 = c \cdot c$$

czyli

$$a^2+b^2 = c^2$$ c. b. d. o.

Uwaga. Aby sens twierdzenia Pitagorasa wyrazić bardziej obrazowo, posłużmy się następującym rysunkiem (rys. 100).



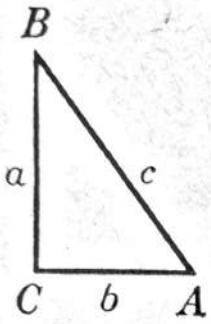
Rys. 100

Mamy tu trójkąt prostokątny i trzy kwadraty zbudowane na bokach tego trójkąta. Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej jest równe sumie pól kwadratów zbudowanych na obu przyprostokątnych.

Znaczenie twierdzenia Pitagorasa w geometrii jest ogromne. Pierwsze jego zastosowania pokazujemy poniżej.

Przykład 1. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego wynoszą 8 cm i 15 cm. Obliczyć przeciwprostokątną.

Rozwiązanie. Dane: $a = 15$ cm, $b = 8$ cm. Obliczyć c (rys. 101).



Rys. 101

Stosując wzór Pitagorasa, mamy kolejno:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 15^2 + 8^2$$

$$c^2 = 225 + 64$$

$$c^2 = 289$$

$$c = \sqrt{289} = 17$$

Odpowiedź. Przeciwprostokątna ma długość 17 cm.

Przykład 2. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego wynosi 25 cm, a jedna z przyprostokątnych 24 cm. Obliczyć drugą przyprostokątną.

Rozwiązanie. Dane: $c = 25$ cm, $a = 24$ cm. Obliczyć b (rys. 101).

Wzór Pitagorasa wygodniej jest teraz napisać w odwrotnym porządku

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Podstawiając dane liczbowe, otrzymujemy kolejno

$$24^2 + b^2 = 25^2$$

$$b^2 = 25^2 - 24^2$$

Po prawej stronie mamy teraz różnicę kwadratów. Możemy rozłożyć ją na czynniki, przez co unikniemy dwukrotnego podnoszenia do kwadratu. Będzie

$$b^2 = (25 + 24)(25 - 24)$$

$$b^2 = 49 \cdot 1$$

$$b^2 = 49$$

$$b = 7$$

Odpowiedź. Druga przyprostokątna ma długość 7 cm.

Pytania

1. Wypowiedzcie i udowodnijcie twierdzenie Pitagorasa.
2. Jakie zastosowania twierdzenia Pitagorasa poznaliśmy w tej lekcji?

Zadania

1. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego wynoszą 12 cm i 35 cm. Obliczyć przeciwprostokątną.

2. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego wynosi 85 cm, a jedna z przyprostokątnych 84 cm. Obliczyć drugą przyprostokątną.

3. W trójkącie prostokątnym ABC mamy dane: $c = 10$ cm, $p = 3{,}6$ cm. Obliczyć q, a, b. (Oznaczenia z rys. 99).

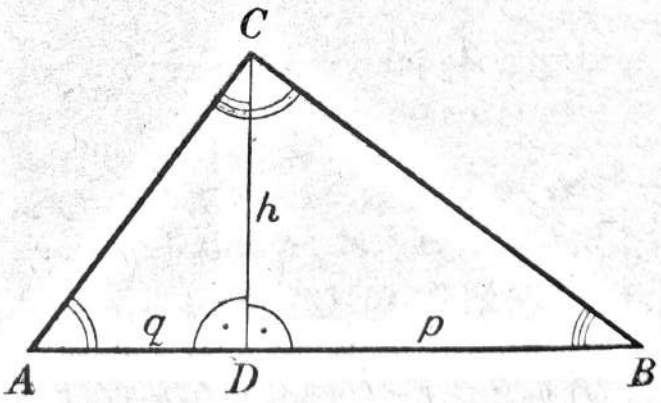
Odpowiedzi

1. 37 cm. **2.** 13 cm. **3.** $q = 6{,}4$ cm, $a = 6$ cm, $b = 8$ cm.

LEKCJA 66

Twierdzenie o wysokości w trójkącie prostokątnym

W twierdzeniach z lekcji 64 i 65 występowały boki trójkąta oraz rzuty przyprostokątnych na przeciwprostokątną. Obecnie poznamy twierdzenie, które pozwoli obliczyć wysokość trójkąta opuszczoną z wierzchołka kąta prostego, gdy dane są wspomniane rzuty.



Rys. 102

TWIERDZENIE 3. **W trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego równa się iloczynowi rzutów obu przyprostokątnych na przeciwprostokątną.**

Niech będzie dany trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90^0$, odcinek $CD = h$ jest wysokością, $AD = q$, $DB = p$ (rys. 102).

Założenie: W $\triangle ABC$ jest $\sphericalangle ACB = 90^0$

Teza: $h^2 = p \cdot q$

Dowód. Z lekcji 64 wiemy, że

$$\triangle ADC \sim \triangle ABC$$

i

$$\triangle DBC \sim \triangle ABC$$

a z lekcji 43 wiemy, że dwa trójkąty podobne do trzeciego są podobne (str. 215), zatem

$$\triangle ADC \sim \triangle DBC$$

Na rys. 102 kąty odpowiednie trójkątów: $\triangle ADC$ i $\triangle DBC$ są oznaczone w jednakowy sposób.

Odpowiednimi bokami tych trójkątów są (na pierwszym miejscu piszemy boki trójkąta ADC, na drugim boki trójkąta DBC):

$$AC \text{ i } CB,\ CD \text{ i } DB,\ AD \text{ i } CD$$

Odpowiednie boki trójkątów podobnych są proporcjonalne, więc

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{CD}$$

czyli

$$\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$$

a stąd

$$h^2 = p \cdot q \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Uwaga. Biorąc pod uwagę, że w proporcji $\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$ wysokość h powtarza się jako wyraz skrajny, możemy twierdzenie 3 wypowiedzieć w formie następującej:

W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego jest średnią proporcjonalną rzutów obu przyprostokątnych na przeciwprostokątną.

Pytania

1. Wypowiedzcie twierdzenie poznane w tej lekcji.
2. W jaki sposób wykazaliśmy, że $\triangle ADC \sim \triangle DBC$?
3. Wymieńcie odpowiednie boki tych trójkątów.

4. Napiszcie proporcję, z której wynika teza twierdzenia 3.
5. Wypowiedzcie twierdzenie 3 w innej formie.
6. Wypowiedzcie twierdzenie 1 z lekcji 64 oraz twierdzenie Pitagorasa.

Zadania

1. W trójkącie prostokątnym rzuty przyprostokątnych na przeciwprostokątną są 4 cm i 9 cm. Obliczyć wysokość opuszczoną z wierzchołka kąta prostego, przeciwprostokątną i obie przyprostokątne.

2. W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego wynosi 4 cm, rzut jednej z przyprostokątnych na przeciwprostokątną wynosi 2 cm. Obliczyć rzut drugiej przyprostokątnej, przeciwprostokątną i obie przyprostokątne.

3. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych wynosi 6 cm, przeciwprostokątna równa się 12 cm. Obliczyć rzuty obu przyprostokątnych na przeciwprostokątną i wysokość opuszczoną z wierzchołka kąta prostego.

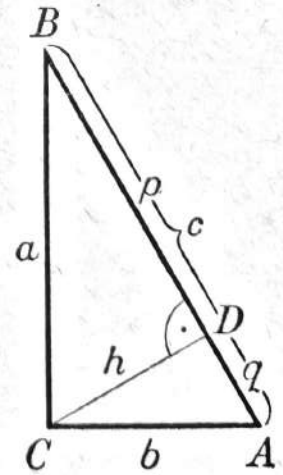
Odpowiedzi

1. $h = 6$ cm, $c = 13$ cm, $a = 3\sqrt{13}$ cm, $b = 2\sqrt{13}$ cm, **2.** 8 cm, 10 cm, $2\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm, **3.** 3 cm, 9 cm, $3\sqrt{3}$ cm.

LEKCJA 67

Zastosowanie poznanych twierdzeń do rozwiązywania zadań

Przykład 1. W trójkącie prostokątnym ABC dane są: przeciwprostokątna $AB = 20$ cm i przyprostokątna $BC = 16$ cm. Obliczyć drugą przyprostokątną i wysokość.



Rys. 103

Rozwiązanie

Dane: $AB = c = 20$ cm, $BC = a = 16$ cm.

Obliczyć: $AC = b$ i $CD = h$ (rys. 103).

Mając daną przeciwprostokątną i jedną z przyprostokątnych, możemy drugą przyprosto-

kątną obliczyć na podstawie twierdzenia Pitagorasa (wypowiedzcie głośno to twierdzenie).

$$a^2+b^2=c^2$$
$$b^2=c^2-a^2$$
$$b^2=20^2-16^2$$
$$b^2=(20-16)(20+16)$$
$$b^2=4\cdot 36$$
$$b=12$$

Zatem przyprostokątna AC ma długość 12 cm.

Wysokość h można by obliczyć znajdując najpierw rzuty p i q na podstawie twierdzenia 1 z lekcji 64, a następnie stosując twierdzenie 3 z lekcji poprzedniej; jest jednak sposób prostszy.

Jak wiemy z lekcji 21 (str. 113), pole trójkąta prostokątnego możemy obliczać dwoma sposobami:

$$S=\frac{1}{2}c\cdot h \quad \text{lub} \quad S=\frac{1}{2}a\cdot b$$

Stąd mamy równość

$$\frac{1}{2}c\cdot h=\frac{1}{2}a\cdot b$$

z której otrzymujemy kolejno

$$c\cdot h=ab$$

$$h=\frac{ab}{c}$$

Podstawiając dane liczbowe, mamy

$$h=\frac{16\cdot 12}{20}=9{,}6$$

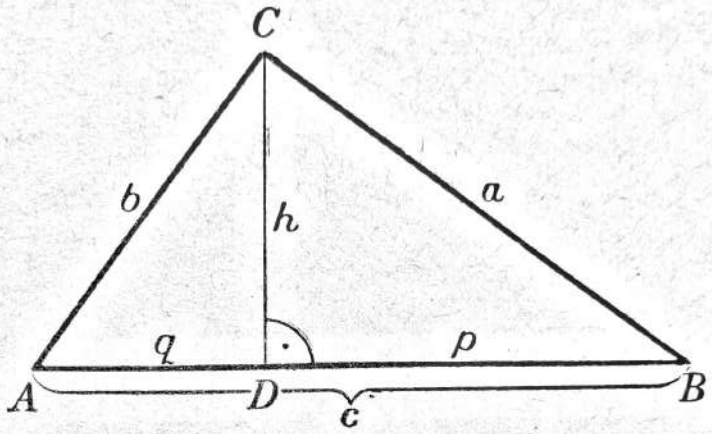
Odpowiedź. Przyprostokątna $AC=12$ cm, wysokość $CD=9{,}6$ cm.

Przykład 2. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna $AC=5$ cm, wysokość $CD=4\frac{8}{13}$ cm. Obliczyć przeciwprostokątną i drugą przyprostokątną.

Rozwiązanie

Dane: $AC = b = 5$ cm, $CD = h = 4\frac{8}{13}$ cm.

Obliczyć: $AB = c$ i $BC = a$ (rys. 104).



Rys. 104

Rozważmy najpierw trójkąt prostokątny ADC, w którym odcinek b jest przeciwprostokątną, a odcinki q i h są przyprostokątnymi. Mając dane b i h, możemy z tego trójkąta obliczyć q na podstawie twierdzenia Pitagorasa. Twierdzenie to w odniesieniu do trójkąta ADC napiszemy w postaci wzoru

$$q^2+h^2 = b^2$$

z niego zaś otrzymujemy kolejno:

$$q^2 = b^2-h^2$$

$$q^2 = (b-h)(b+h)$$

$$q^2 = \left(5-4\frac{8}{13}\right)\left(5+4\frac{8}{13}\right)$$

$$q^2 = \frac{5}{13}\cdot\frac{125}{13}$$

$$q^2 = \frac{625}{13^2}$$

$$q = \frac{25}{13}$$

Znając rzut q oraz wysokość h, możemy obliczyć rzut p, stosując do trójkąta ABC twierdzenie 3 z lekcji poprzedniej (wypowiedzcie głośno to twierdzenie).

$$h^2 = p \cdot q$$

Stąd

$$p = \frac{h^2}{q}$$

czyli

$$p = \frac{\left(4\frac{8}{13}\right)^2}{\frac{25}{13}}$$

$$p = \left(\frac{60}{13}\right)^2 : \frac{25}{13} = \frac{60^2}{13^2} \cdot \frac{13}{25} = \frac{3600}{13 \cdot 25} = \frac{144}{13}$$

Teraz już łatwo obliczymy przeciwprostokątną c

$$c = p + q = \frac{25}{13} + \frac{144}{13} = \frac{169}{13} = 13$$

Znając zaś przeciwprostokątną c i rzut p, możemy obliczyć przyprostokątną a na podstawie twierdzenia 1 z lekcji 64 (i to twierdzenie zacytujcie głośno).

$$a^2 = c \cdot p$$

$$a^2 = 13 \cdot \frac{144}{13}$$

$$a^2 = 144$$

$$a = 12$$

Odpowiedź. Przeciwprostokątna $AB = 13$ cm, przyprostokątna $BC = 12$ cm.

Uwaga. Zaproponujcie inny sposób rozwiązania tego zadania.

Przykład 3. W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna $AB = 82$ cm i $AC : BC = 9 : 40$. Obliczyć przyprostokątne i wysokość.

Rozwiązanie

Dane: $c = 82$ cm, $b : a = 9 : 40$

Obliczyć: a, b, h (rys. 105).

Ze względu na proporcję $b : a = 9 : 40$ możemy wprowadzić oznaczenia

$$b = 9x, \quad a = 40x$$

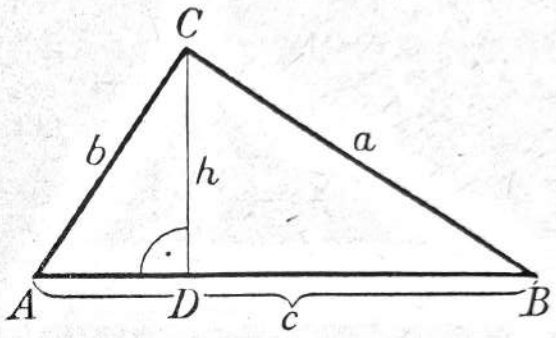
gdzie x oznacza wspólną miarę odcinków a i b.

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ABC, otrzymujemy kolejno

$$a^2+b^2 = c^2$$
$$(40x)^2+(9x)^2 = 82^2$$
$$1600x^2+81x^2 = 6724$$
$$1681x^2 = 6724$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2$$

Stąd

$a = 40x = 80$ cm,
$b = 9x = 18$ cm.



Rys. 105

Wysokość h można obliczyć podobnie, jak w przykładzie 1 tej lekcji. Wykonajcie rachunek samodzielnie. Powinniście otrzymać wynik $17\frac{23}{41}$ cm, czyli w przybliżeniu 17,6 cm.

Zadania

1. W trójkącie prostokątnym ABC dane są przyprostokątne $AC = 36$ cm i $BC = 48$ cm. Obliczyć przeciwprostokątną i wysokość.

2. W trójkącie prostokątnym ABC dane są: przyprostokątna $BC = 40$ cm i wysokość $CD = 24$ cm. Obliczyć drugą przyprostokątną i przeciwprostokątną.

3. W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna $c = 102$ cm i $a:b = 8:15$. Obliczyć a, b, p, q, h (oznaczenia jak na rys. 104).

4. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość $h = 42$ cm i $p:q = 2:3$. Obliczyć p, q, c, a, b.

***5.** W trójkącie prostokątnym ABC wysokość $h = 36$ cm i $a:b = 3:4$. Obliczyć a, b, c, p, q.

Odpowiedzi

1. 60 cm; 28,8 cm. **2.** 30 cm i 50 cm. Wskazówka: Obliczyć najpierw odcinek DB. **3.** $a = 48$ cm, $b = 90$ cm, $h = \frac{720}{17}$ cm, $p = \frac{384}{17}$ cm, $q = \frac{1350}{17}$ cm. **4.** $p = 14\sqrt{6}$ cm, $q = 21\sqrt{6}$ cm, $a = 14\sqrt{15}$ cm, $b = 21\sqrt{10}$ cm, $c = 35\sqrt{6}$ cm. **5.** $a = 45$ cm, $b = 60$ cm, $c = 75$ cm, $p = 27$ cm, $q = 48$ cm. Wskazówka: Oznaczamy: $a = 3x$, $b = 4x$. Za pomocą twierdzenia Pitagorasa obliczamy, że $c = 5x$. Z poprzednich zadań wiemy, że $h = \frac{ab}{c}$; z równości tej możemy obliczyć x.

LEKCJA 68

Konstrukcja średniej proporcjonalnej dwu danych odcinków

Na dzisiejszej lekcji rozwiążemy następujące zadanie konstrukcyjne.

Zadanie. Dane są odcinki a i b. Znaleźć odcinek x będący średnią proporcjonalną tych odcinków.

Rozwiązanie

1. Analiza zadania. Szukany odcinek x ma być średnią proporcjonalną danych odcinków a i b, a więc musi spełniać warunek

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

równoważny warunkowi

$$x^2 = ab$$

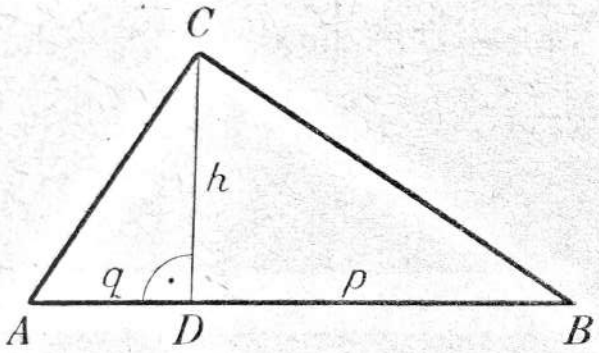
Jeśli tę ostatnią równość zestawimy z równością wyrażającą twierdzenie 3 z lekcji 66

$$h^2 = p \cdot q$$

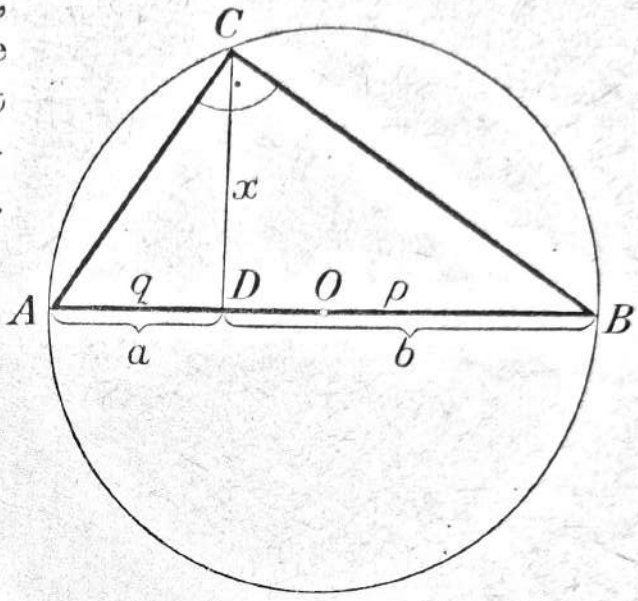
to z łatwością dostrzeżemy, że nasze zadanie polega na zbudowaniu

trójkąta prostokątnego, w którym dane odcinki a i b będą rzutami przyprostokątnych na przeciwprostokątną. Wysokość tego trójkąta prostokątnego będzie równa szukanemu odcinkowi x.

Zbudowanie takiego trójkąta prostokątnego nie jest trudne, jeśli tylko pamiętamy twierdzenie z klasy VIII orzekające, że kąt wpisany w okrąg i oparty na średnicy jest kątem prostym (rys. 107).

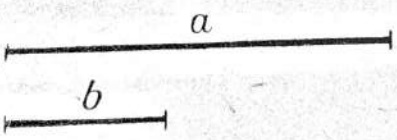


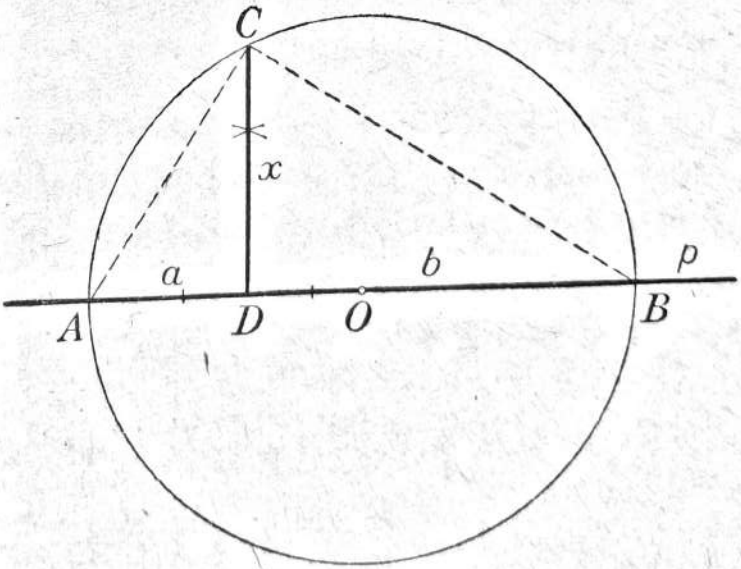
Rys. 106



Rys. 107

2. Konstrukcja. Kreślimy dowolną prostą p i odkładamy na niej, poczynając od dowolnego punktu A, odcinki $AD = a$ i $DB = b$ (rys. 108). Następnie na odcinku AB jako na średnicy budujemy półokrąg (w tym celu oczywiście przepoławiamy uprzednio odcinek AB), po czym z punktu D wystawiamy prostopadłą do AB aż do przecięcia się z półokręgiem w punkcie C. Odcinek CD jest szukanym odcinkiem x.





Rys. 108

3. Dowód prawidłowości konstrukcji. Dla wykazania, że konstrukcja została wykonana prawidłowo, kreślimy jeszcze odcinki AC i CB. Powstaje trójkąt ABC, w którym kąt ACB jest prosty (gdyż

jest to kąt wpisany w okrąg i oparty na średnicy). Odcinek $CD = x$ jest w tym trójkącie wysokością, a odcinki a i b są rzutami przyprostokątnych na przeciwprostokątną, więc na mocy twierdzenia 3 z lekcji 66 zachodzi zależność

$$x^2 = ab$$

równoważna proporcji

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Znaleziony odcinek x jest więc istotnie średnią proporcjonalną danych odcinków a i b.

Pytania

1. Co to znaczy, że odcinek x jest średnią proporcjonalną odcinków a i b?
2. Wypowiedzcie twierdzenie, na którym oparliśmy konstrukcję średniej proporcjonalnej.
3. Z jakiego jeszcze twierdzenia korzystaliśmy przy tej konstrukcji?
4. Czy można by rozwiązanie tego zadania konstrukcyjnego oprzeć na twierdzeniu 1 z lekcji 64?

Zadania

1. Dane są odcinki a i $3a$. Zbudować odcinek x będący średnią proporcjonalną tych odcinków.

Uwaga. Odcinek x powinien tu spełniać warunek $x^2 = a \cdot 3a$, który można zapisać w postaci $x^2 = 3a^2$ lub w postaci $x = \sqrt{3a^2}$. Wobec tego zadanie 1 można sformułować tak: Dany jest odcinek a. Zbudować odcinek x określony wzorem $x = \sqrt{3a^2}$.

2. Dany jest odcinek a. Zbudować odcinek x określony wzorem $x = \sqrt{6a^2}$.

3. Dany jest odcinek a. Zbudować odcinek x określony wzorem $x = a\sqrt{5}$.

***4.** Zbudować odcinek x będący średnią proporcjonalną odcinków 2 cm i 6 cm.

*5. Zbudować odcinek $x = \sqrt{10}$ cm.

*6. Zbudować odcinek $x = \sqrt{7}$ cm.

Wskazówki: 2. Równość $x = \sqrt{6a^2}$ można napisać w postaci $x^2 = 6a^2$ lub np. w postaci $x^2 = 2a \cdot 3a$. Chodzi więc o zbudowanie średniej proporcjonalnej odcinków $2a$ i $3a$. 3. $a\sqrt{5} = \sqrt{5a^2}$. 5. Równość $x = \sqrt{10}$ można napisać w postaci $x^2 = 10$ lub np. w postaci $x^2 = 2 \cdot 5$. Chodzi więc o konstrukcję średniej proporcjonalnej odcinków 2 cm i 5 cm. 6. $7 = 1 \cdot 7$.

LEKCJA 69

Rozwiązywanie zadań

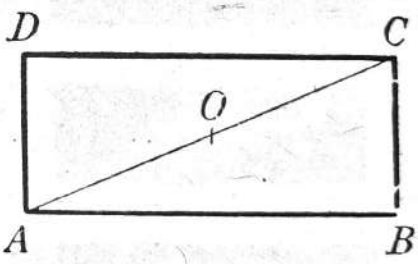
(Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa)

Przykład 1. Dany jest prostokąt o bokach 6 cm i 10 cm. Obliczyć przekątną i promień okręgu opisanego na tym prostokącie.

Rozwiązanie

Dane: $AB = 10$ cm, $BC = 6$ cm.

Obliczyć: AC i AO (rys. 109).



Rys. 109

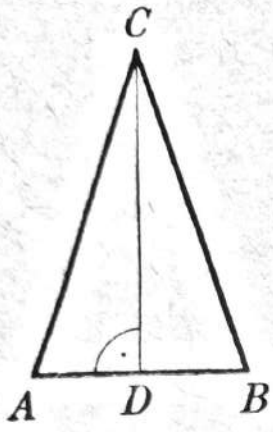
Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty prostokątne. Rozważmy np. $\triangle ABC$; jego przyprostokątne są znane, przeciwprostokątną możemy obliczyć na podstawie twierdzenia Pitagorasa

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 10^2 + 6^2$$
$$AC^2 = 136$$
$$AC = \sqrt{136} = \sqrt{4 \cdot 34} = 2\sqrt{34}$$

Wobec tego $$AO = \frac{1}{2}AC = \sqrt{34}$$

Odpowiedź. Długość przekątnej wynosi $2\sqrt{34}$ cm, czyli w przybliżeniu 11,66 cm, długość promienia koła opisanego jest równa $\sqrt{34}$ cm, czyli w przybliżeniu 5,83 cm.

Przykład 2. Obliczyć pole trójkąta równoramiennego, którego równe boki mają długość 52 cm, a podstawa jest równa 40 cm.



Rys. 110

Rozwiązanie

Dane: $AC = BC = 52$ cm, $AB = 40$ cm.

Obliczyć: $S_{\triangle ABC}$ (rys. 110).

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu boku przez odpowiednią wysokość. Rysujemy tedy wysokość CD. Dzieli ona trójkąt ABC na dwa przystające trójkąty prostokątne, więc $AD = DB = 20$ cm. Rozważmy np. $\triangle ADC$. W trójkącie tym znamy przeciwprostokątną AC i przyprostokątną AD; przyprostokątną CD (czyli wysokość trójkąta ABC) obliczamy na podstawie twierdzenia Pitagorasa

$$AD^2+CD^2 = AC^2$$
$$CD^2 = AC^2-AD^2$$
$$CD^2 = 52^2-20^2$$
$$CD^2 = (52-20)(52+20)$$
$$CD^2 = 32\cdot 72$$
$$CD^2 = 16\cdot 2\cdot 36\cdot 2$$
$$CD^2 = 16\cdot 36\cdot 2^2$$
$$CD = \sqrt{16\cdot 36\cdot 2^2} = 4\cdot 6\cdot 2 = 48$$

Wiedząc, że $AB = 40$ cm, $CD = 48$ cm, obliczamy pole trójkąta ABC

$$S = \frac{1}{2}\cdot 40\cdot 48 = 960 \text{ cm}^2$$

Odpowiedź. Pole trójkąta wynosi 9,6 dm^2.

Uwaga. Zauważcie, jak ułatwiliśmy sobie rachunki przy obliczaniu CD.

Przykład 3. Bok rombu ma długość 50 cm, a jedna z przekątnych 28 cm. Obliczyć pole i wysokość rombu oraz promień okręgu wpisanego w romb.

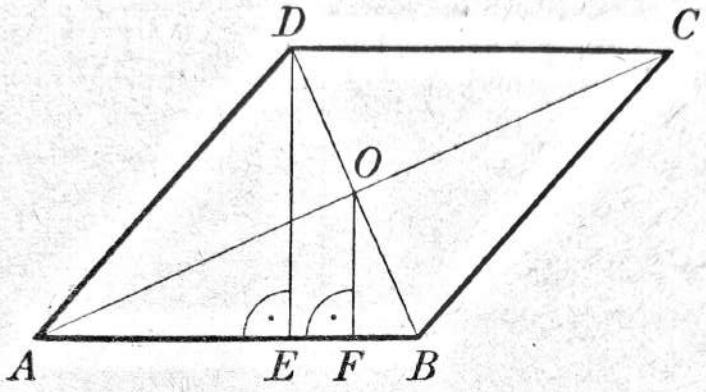
Rozwiązanie

Dane: $AB = BC = CD = DA = 50$ cm, $DB = 28$ cm.

Obliczyć: S, DE i OF (rys. 111).

Z lekcji 22 wiemy, że pole rombu można obliczyć dwoma sposobami:

1) mnożąc podstawę przez wysokość lub
2) biorąc połowę iloczynu przekątnych.



Rys. 111

Chwila zastanowienia wystarczy do stwierdzenia, że w tym zadaniu dogodniej będzie zastosować sposób drugi. Przekątne rombu połowią się i są prostopadłe, więc dzielą romb na cztery przystające trójkąty prostokątne. W każdym z tych trójkątów dwa boki są znane, trzeci bok możemy obliczyć na podstawie twierdzenia Pitagorasa. Weźmy np. pod uwagę $\triangle DOC$. Mamy tam $DC = 50$ cm, $OD = 14$ cm, obliczamy OC:

$$OC^2+OD^2 = DC^2$$
$$OC^2 = DC^2-OD^2$$
$$OC^2 = 50^2-14^2$$
$$OC^2 = (50-14)\,(50+14)$$
$$OC^2 = 36\cdot 64$$
$$OC = \sqrt{36\cdot 64} = 6\cdot 8 = 48 \text{ cm}$$

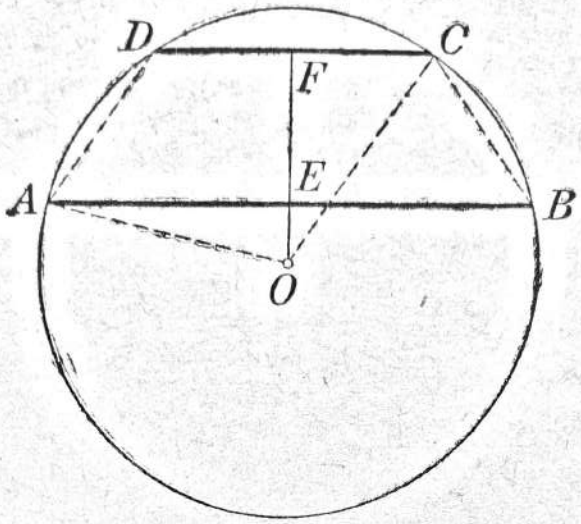
Jeśli $OC = 48$ cm, to przekątna $AC = 96$ cm, wobec tego pole rombu

$$S = \frac{1}{2}AC\cdot BD = \frac{1}{2}\cdot 96\cdot 28 = 1344 \text{ cm}^2$$

$$S = 1344 \text{ cm}^2$$

Znając pole rombu i jego bok, z łatwością obliczymy wysokość,

Dane: $AO = OC = 75$ cm, $OE = 21$ cm, $OF = 45$ cm.
Obliczyć: AB, DC oraz pole trapezu $ABCD$ (rys. 113).



Rys. 113

a) Obliczenie cięciwy AB.

Z trójkąta prostokątnego AOE, w którym $AO = 75$ cm, $EO = 21$ cm, obliczamy przyprostokątną AE na podstawie twierdzenia Pitagorasa

$$AE^2 = AO^2 - OE^2$$
$$AE^2 = 75^2 - 21^2$$
$$AE = 72 \text{ cm (wykonajcie pominięte rachunki!)}$$

Odcinek AE stanowi połowę odcinka AB (dlaczego?), przeto $AB = 144$ cm.

b) Obliczenie cięciwy DC.

Korzystamy z trójkąta prostokątnego OFC:

$$FC^2 = OC^2 - OF^2$$
$$FC^2 = 75^2 - 45^2$$
$$FC = 60$$

Zatem $DC = 120$ cm

c) Obliczenie pola trapezu $ABCD$.

Wysokością trapezu jest odcinek EF równy różnicy odcinków OF i OE

$$EF = 45 \text{ cm} - 21 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$$

Zatem pole trapezu

$$S = \frac{AB+DC}{2} \cdot EF$$

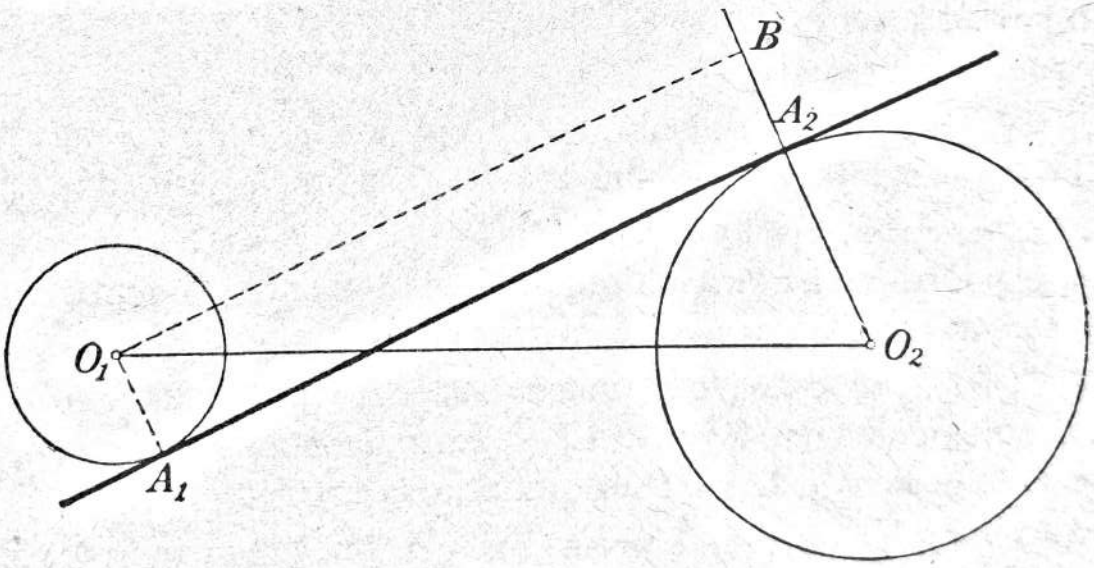
$$S = \frac{144+120}{2} \cdot 24$$

$$S = 3168 \text{ cm}^2 = 31{,}68 \text{ dcm}^2$$

Odpowiedź. $AB = 144$ cm, $DC = 120$ cm, $S = 3168$ cm^2.

Przykład 3. Do dwóch okręgów o promieniach 2 cm i 9 cm poprowadzono wspólną styczną wewnętrzną (tzn. styczną do obu okręgów przecinającą odcinek łączący ich środki). Wiedząc, że odległość środków kół jest równa 13 cm, obliczyć długość odcinka stycznej zawartego między punktami styczności.

Rozwiązanie



Rys. 114

Dane: $O_1O_2 = 13$ cm, $O_1A_1 = 2$ cm, $O_2A_2 = 9$ cm.
Obliczyć: A_1A_2 (rys. 114).

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności, zatem $O_1A_1 \perp A_1A_2$ i $O_2A_2 \perp A_1A_2$. Poprowadźmy przez punkt O_1 prostą równoległą do A_1A_2. Powstanie trójkąt prostokątny O_1O_2B, którego przyprostokątna O_1B jest równa szukanemu odcinkowi A_1A_2, przyprostokątna O_2B jest równa su-

mie promieni obu kół, a więc równa 11 cm, a przeciwprostokątna $O_1O_2 = 13$ cm.

Stosując twierdzenie Pitagorasa do $\triangle O_1O_2B$, mamy

$$O_1B^2 = O_1O_2^2 - O_2B^2$$
$$O_1B^2 = 13^2 - 11^2$$
$$O_1B^2 = 48$$
$$O_1B = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Zatem również $A_1A_2 = 4\sqrt{3}$ cm.

Odpowiedź. Odcinek wspólnej stycznej zawarty między punktami styczności ma długość $4\sqrt{3}$ cm.

Zadania

1. Z punktu leżącego na okręgu poprowadzono do końców średnicy dwie cięciwy, których długości wynoszą 1 m i 2,4 m. Obliczyć promień okręgu.

2. W okrąg o promieniu $3\sqrt{29}$ cm wpisano prostokąt, którego boki pozostają w stosunku 2:5. Obliczyć pole prostokąta.

3. Z kawałka blachy w kształcie koła o średnicy 35 cm wycięto trapez o podstawach równych odpowiednio 9,8 cm i 28 cm. Obliczyć pole tego trapezu. Rozważyć dwa przypadki.

4. Dany jest okrąg o promieniu 26 cm i punkt P odległy od środka okręgu o 35 cm. Z punktu P poprowadzono styczną do okręgu. Obliczyć odległość punktu P od punktu styczności.

***5.** Do dwóch okręgów o promieniach 5 cm i 12 cm poprowadzono wspólną styczną zewnętrzną (tzn. styczną do obu okręgów nie przecinającą odcinka łączącego ich środki). Wiedząc, że odległość środków kół wynosi 20 cm, obliczyć długość odcinka stycznej zawartego między punktami styczności.

Odpowiedzi

1. 1,3 m. **2.** 360 cm². **3.** 119,07 cm², gdy obie cięciwy leżą po jednej stronie środka koła; 515,97 cm², gdy środek koła znajduje się między cięciwami. **4.** $3\sqrt{61}$ cm. **5.** $3\sqrt{39}$ cm.

LEKCJA 71

Rozwiązywanie zadań

(Zastosowanie różnych twierdzeń)

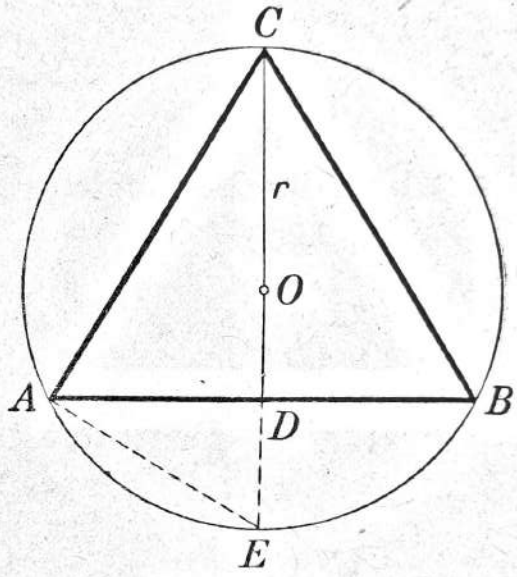
Przykład 1. Na trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AC = BC$, $AB = 12$ cm, a wysokość $CD = 8$ cm, opisano okrąg. Obliczyć promień tego okręgu.

Rozwiązanie

Dane: $AB = 12$ cm, $CD = 8$ cm.

Obliczyć: $OC = r$ (rys. 115).

Jeśli wysokość CD trójkąta ABC przedłużymy aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie E, a następnie punkt E połączymy z punktem A, to powstanie trójkąt prostokątny AEC (zauważcie, że $\sphericalangle EAC$ jest wpisany w okrąg i oparty na średnicy EC).



Rys. 115

Zwróćmy uwagę na ten trójkąt. Odcinek AD, równy 6 cm, jest tu wysokością opuszczoną z wierzchołka kąta prostego A, a odcinek CD, równy 8 cm jest rzutem przyprostokątnej AC na przeciwprostokątną EC.

Nasuwa się myśl, żeby za pomocą twierdzenia 3 z lekcji 66 znaleźć rzut ED przyprostokątnej AE, a następnie rzuty ED i DC zsumować. W ten sposób obliczymy przeciwprostokątną EC, tzn. średnicę okręgu opisanego na trójkącie ABC. Szukany promień będzie oczywiście połową średnicy EC.

Twierdzenie 3 mówi, że w trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego równa się iloczynowi rzutów obu przyprostokątnych na przeciwprostokątną. W odniesieniu do $\triangle AEC$ mamy

$$AD^2 = ED \cdot DC$$

a stąd

$$ED = \frac{AD^2}{DC}$$

$$ED = \frac{6^2}{8}$$

$$ED = 4{,}5 \text{ cm}$$

Zatem

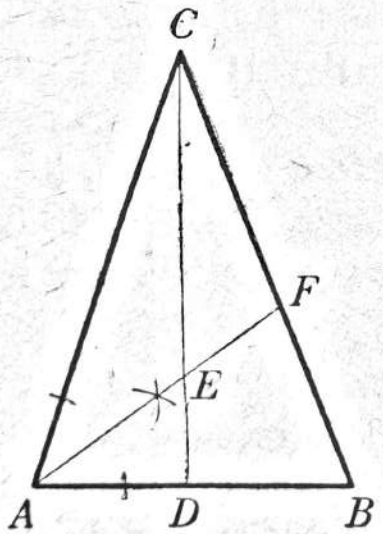
$$EC = ED + DC = 4{,}5 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 12{,}5 \text{ cm}$$

$$r = OC = \frac{1}{2} EC = 6{,}25 \text{ cm}$$

Odpowiedź. Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC ma długość 6,25 cm.

Uwaga. Rozwiążcie to zadanie sposobem zastosowanym w lekcji 49, przykład 1!

Przykład 2. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o bokach $AC = BC = 13$ cm, $AB = 10$ cm.



Rys. 116

Obliczyć odcinki, na które dwusieczna kąta A dzieli wysokość CD.

Rozwiązanie

Dane: $AC = BC = 13$ cm, $AB = 10$ cm, $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EAC$, $CD \perp AB$.

Obliczyć: DE i EC (rys. 116).

Najpierw obliczamy wysokość CD na podstawie twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego ADC, w którym $AC = 13$ cm, $AD = \frac{1}{2} AB = 5$ cm.

$$CD^2 = AC^2 - AD^2$$
$$CD^2 = 13^2 - 5^2 = (13-5)(13+5) = 144$$
$$CD = 12 \text{ cm}.$$

Następnie do tegoż trójkąta ADC stosujemy twierdzenie o dwu-

siecznej z lekcji 26: *Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli bok przeciwległy na odcinki proporcjonalne do boków przyległych*

$$\frac{ED}{EC} = \frac{AD}{AC}$$

Wprowadzając oznaczenia $ED = x$, $EC = 12-x$, mamy

$$\frac{x}{12-x} = \frac{5}{13}$$

a stąd kolejno

$$13x = 5(12-x),\ 13x = 60-5x,\ 18x = 60$$

$$x = 3\frac{1}{3}$$

Zatem $ED = 3\frac{1}{3}$ cm, $EC = 12-3\frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$ cm.

Odpowiedź. Dwusieczna kąta A dzieli wysokość CD na odcinki $DE = 3\frac{1}{3}$ cm i $EC = 8\frac{2}{3}$ cm.

Przykład 3. Obliczyć promień okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$, $AB = 14$ cm, wysokość $CD = 24$ cm.

Rozwiązanie. Środkiem okręgu wpisanego w trójkąt jest punkt przecięcia dwusiecznych kątów, promieniem okręgu wpisanego jest odcinek opuszczony ze środka prostopadle do boku trójkąta. Na rys. 116 dwusieczną jest nie tylko AF, lecz także wysokość CD (gdyż $\triangle ABC$ jest równoramienny, przy czym $AC = BC$). Zatem środkiem okręgu wpisanego jest punkt E, a promieniem odcinek ED. Zadanie jest więc podobne do poprzedniego. Rozwiążcie je samodzielnie. Powinniście otrzymać wynik: $r = 5\frac{1}{4}$ cm.

Zadania

1. Obliczyć promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AC = BC = 17$ cm, $AB = 30$ cm.

2. W okrąg o promieniu 6,5 cm wpisano trójkąt równoramienny ostrokątny o podstawie równej 11,2 cm. Obliczyć pole tego trójkąta.

*3. W koło o promieniu 6 cm wpisano kwadrat i narysowano cięciwę przechodzącą przez środki dwóch kolejnych boków kwadratu. Znaleźć jej odległość od środka koła i jej długość. Znaleźć także długość odcinków łączących jej koniec z sąsiednimi wierzchołkami kwadratu.

4. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm.

a) Obliczyć odcinki, na które wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną.

b) Obliczyć odcinki, na które dzieli przeciwprostokątną dwusieczna kąta prostego.

*c) Obliczyć długość tej dwusiecznej.

Odpowiedzi

1. $\frac{289}{16}$ cm. Wskazówka: Rysunek jak w przykładzie 1; zastosować twierdzenie 1 z lekcji 64. **2.** 54,88 cm^2. **3.** 3 cm, $6\sqrt{3}$ cm, 6 cm, $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm. **4.** 3,6 i 6,4 cm; $4\frac{2}{7}$ cm i $5\frac{5}{7}$ cm; $\frac{24}{7}\sqrt{2}$ cm.

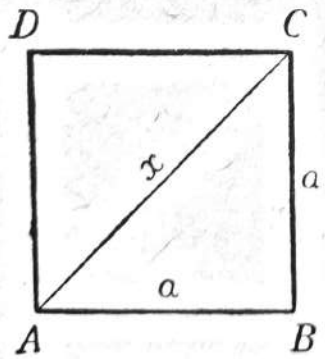
LEKCJA 72

Kwadrat i trójkąt o kątach 45°, 45°, 90°

Zadanie 1. Obliczyć przekątną kwadratu o boku a.

Rozwiązanie

Dane: $AB = BC = a$.



Rys. 117

Obliczyć: $AC = x$ (rys. 117)

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ABC, otrzymujemy kolejno:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$x^2 = a^2 + a^2$$
$$x^2 = 2a^2$$
$$x = \sqrt{2a^2}$$
$$x = a\sqrt{2}$$

Zatem: przekątna kwadratu równa się iloczynowi długości boku przez $\sqrt{2}$.

Uwaga 1. Zapamiętanie tego wyniku jest bardzo pożądane, lecz nie obowiązkowe.

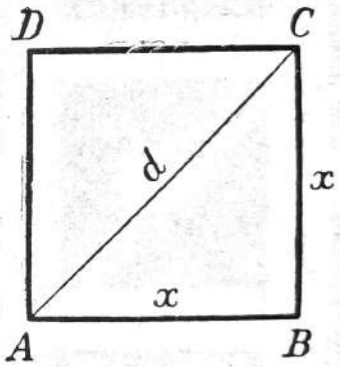
Uwaga 2. Gdy bok kwadratu a równa się 1, wówczas przekątna kwadratu x równa się $\sqrt{2}$. Fakt ten zapowiadaliśmy już w lekcji 17. Przy jakiej sposobności?

Kto pamięta wzór $x = a\sqrt{2}$, ten z łatwością obliczy a, gdy dane jest x:

$$a = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Ponieważ jednak pamięć jest zawodna, musimy nauczyć się rozwiązywać również takie zadanie:

Zadanie 2. Obliczyć bok kwadratu, którego przekątna równa się d.



Rys. 118

Rozwiązanie

Dane: $AC = d$.

Obliczyć: $AB = BC = x$ (rys. 118).

Bierzemy pod uwagę trójkąt prostokątny ABC. Obie jego przyprostokątne są równe, więc oznaczamy każdą z nich tą samą literą x, po czym stosujemy twierdzenie Pitagorasa

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$x^2 + x^2 = d^2$$

$$2x^2 = d^2$$

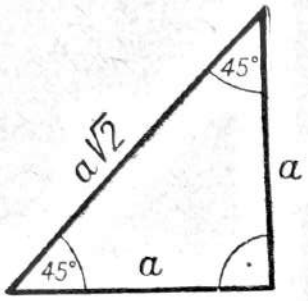
$$x^2 = \frac{d^2}{2}$$

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

Aby usunąć pierwiastek z mianownika, mnożymy jeszcze licznik i mianownik przez $\sqrt{2}$

$$x = \frac{d\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$



Rys. 119

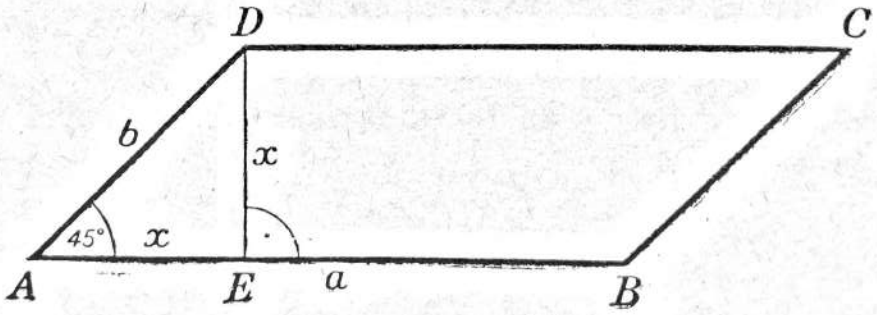
Uwaga. Przekątna dzieli kwadrat na dwa trójkąty prostokątne i równoramienne. Trójkąty takie spotykamy często w różnych zadaniach. Również niektóre ekierki mają kształt trójkątów prostokątnych równoramiennych. W trójkącie prostokątnym równoramiennym kąty wynoszą odpowiednio: 45°, 45° i 90° (rys. 119).

Przykład. Obliczyć pole równoległoboku, którego kolejne boki są równe a i b, a kąt ostry ma 45°.

Rozwiązanie

Dane: $AB = a$, $AD = b$, $\sphericalangle BAD = 45°$.

Obliczyć: S (rys. 120).



Rys. 120

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi boku przez odpowiednią wysokość

$$S = AB \cdot DE$$

Wysokość DE nie jest znana, trzeba ją obliczyć. W tym celu roz-

ważmy trójkąt prostokątny AED. W trójkącie tym $\sphericalangle A = 45°$, zatem również $\sphericalangle ADE = 45°$ (dlaczego?). Jest to więc trójkąt równoramienny, przy czym $DE = AE$.

Oznaczając $DE = x$ i $AE = x$, stosujemy do trójkąta AED twierdzenie Pitagorasa

$$AE^2 + ED^2 = AD^2$$

$$x^2 + x^2 = b^2$$

Postępując dalej jak w zadaniu 2, otrzymujemy

$$x = \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

Wiedząc, że wysokość $DE = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, obliczamy pole równoległoboku

$$S = AB \cdot DE = a \cdot \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{ab\sqrt{2}}{2}$$

$$S = \frac{ab\sqrt{2}}{2}$$

Odpowiedź. Pole równoległoboku $S = \frac{ab\sqrt{2}}{2}$.

Zadania

1. Obliczyć bok i pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu r.

2. Obliczyć promień koła opisanego na kwadracie o boku a.

3. Obliczyć pole trójkąta ABC, w którym $AB = c$, $BC = a$, $\sphericalangle B = 45°$.

4. Obliczyć pole rombu, którego bok równa się a, a kąt rozwarty ma 135°.

Odpowiedzi

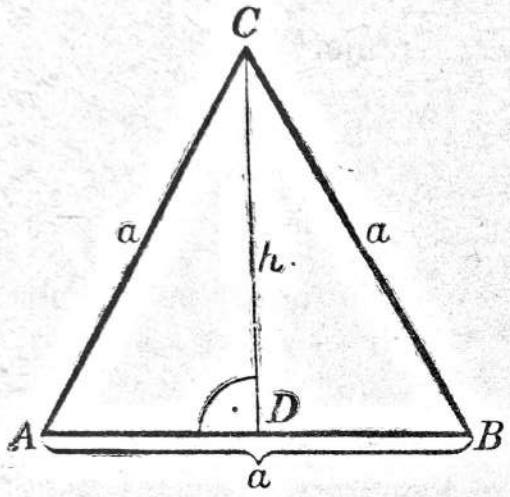
1. $r\sqrt{2}$, $2r^2$ **2.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **3.** $\frac{ac\sqrt{2}}{4}$ **4.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

LEKCJE 73 i 74

Trójkąt równoboczny i trójkąt o kątach 30°, 60°, 90°

Zadanie 1. Obliczyć wysokość i pole trójkąta równobocznego o boku a.

Rozwiązanie



Rys. 121

Dane: $AB = BC = AC = a$,
$CD \perp AB$.

Obliczyć: $CD = h$ i S (rys. 121).

Wysokość $CD = h$ obliczymy z trójkąta prostokątnego ADC, w którym przeciwprostokątna $AC = a$, przyprostokątna $AD = \frac{a}{2}$. Zastosujemy oczywiście twierdzenie Pitagorasa:

$$AD^2 + DC^2 = AC^2$$

$$DC^2 = AC^2 - AD^2$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Pole trójkąta równa się połowie iloczynu boku przez odpowiednią wysokość

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CD$$

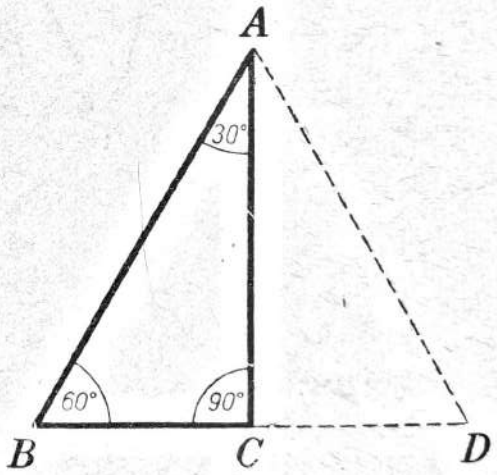
$$S = \frac{1}{2} a \cdot h$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Uwaga. Zapamiętanie wzorów na wysokość i pole trójkąta równobocznego jest bardzo pożądane.

W trójkącie równobocznym wszystkie kąty są równe, więc każdy z nich ma 60°. Wysokość w trójkącie równobocznym jest zarazem dwusieczną, przeto na rys. 121 jest $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = 30°$. Widzimy, że wysokość CD dzieli trójkąt równoboczny na dwa przystające trójkąty prostokątne o bardzo charakterystycznym układzie kątów: 30°, 60°, 90°. Takie trójkąty spotykamy również bardzo często w zadaniach.



Rys. 122

Zwróćmy uwagę na rys. 122.

Widzimy, że $BC = \frac{1}{2} BD$, ale $BD = AB$, więc

$$BC = \frac{1}{2} AB$$

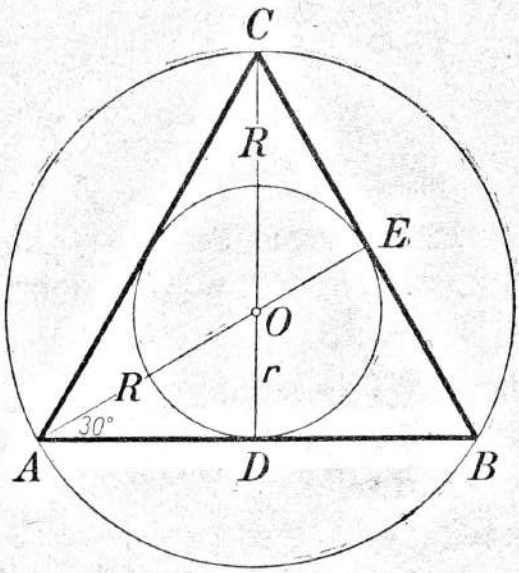
Mamy więc twierdzenie:

TWIERDZENIE. **W trójkącie prostokątnym, w którym jeden z kątów ostrych ma 30°, przyprostokątna leżąca naprzeciw tego kąta jest równa połowie przeciwprostokątnej.**

Twierdzenie to zastosujemy do rozwiązania następującego zadania.

Zadanie 2. Dany jest trójkąt równoboczny o boku a. Obliczyć promienie kół wpisanego i opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie. W trójkącie równobocznym każda wysokość jest jednocześnie dwusieczną kąta i symetralną boku. Wobec tego środek okręgu wpisanego i środek okręgu opisanego pokrywają się. Ów wspólny środek dzieli każdą wysokość na dwa odcinki, z których jeden jest równy promieniowi koła wpisanego, a drugi promieniowi koła opisanego (rys. 123).



Rys. 123

Dane: $AB = BC = AC = a$. Obliczyć $OD = r$ i $OA = R$

Rozważmy trójkąt AOD. W trójkącie tym $AD = \frac{a}{2}$, $\sphericalangle ADO = 90°$, $\sphericalangle OAD = 30°$, przeto — na podstawie udowodnionego przed chwilą twierdzenia — przyprostokątna OD równa się połowie przeciwprostokątnej AO

$$OD = \frac{1}{2} AO$$

Zatem

$$r = \frac{1}{2} R$$

czyli

$$R = 2r$$

Zastosujemy teraz do $\triangle ADO$ twierdzenie Pitagorasa. Otrzymamy kolejno

$$AO^2 = OD^2 + AD^2$$

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$(2r)^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$4r^2 - r^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$3r^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$r^2 = \frac{a^2}{12}$$

$$r = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{36}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Ponieważ zaś $R = 2r$, to

$$R = 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Odpowiedź. Promień okręgu wpisanego $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, promień okręgu opisanego $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Uwaga. Z rys. 123 widzimy, że $CD = CO + OD = R + r = 2r + r = 3r$.

$$CD = 3r$$

stąd

$$r = \frac{1}{3} CD$$

Zatem: **Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest równy $\frac{1}{3}$ wysokości trójkąta.**

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest równy $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta.

Pytania

1. Jakim wzorem wyraża się przekątna kwadratu o boku a?
2. Jakim wzorem wyraża się wysokość trójkąta równobocznego o boku a?
3. Jakie szczególne przypadki trójkątów poznaliśmy w tej i poprzedniej lekcji?
4. Jakie poznaliśmy twierdzenie o trójkącie prostokątnym, w którym jeden z kątów ostrych ma 30°?
5. Co wiemy o promieniach okręgu wpisanego i okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku a?

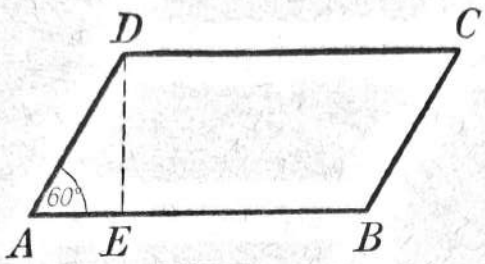
Zadania

1. Obliczyć pole rombu o boku a i kącie ostrym 30°.
2. Obliczyć pole równoległoboku o bokach a i b i kącie ostrym 60°.
3. Obliczyć pole sześciokąta foremnego o boku a.
4. Obliczyć pole trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu R.
5. Obliczyć pole trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o promieniu r.

*6. Obliczyć bok i pole trójkąta równobocznego, którego wysokość równa się h.

*7. Obliczyć bok i pole sześciokąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu r.

1. $\frac{a^2}{2}$. **2.** $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$. Wskazówka: $AE = \frac{1}{2}\,AD$ (rys. 124).



Rys. 124

3. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Wskazówka: Podzielić sześciokąt na 6 trójkątów równobocznych. **4.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Wskazówka: $AO = R$, $OD = \frac{R}{2}$, obliczyć AD (rys. 123). **5.** $3r^2\sqrt{3}$. Wskazówka: $OD = r$, $AO = 2r$, obliczyć AD (rys. 123). **6.** Bok $= \frac{2h}{\sqrt{3}}$, pole $= \frac{h^2}{\sqrt{3}}$. Wskazówka: Oznaczyć $AD = x$ $AC = 2x$ (rys. 123). **7.** Bok $= \frac{2r}{\sqrt{3}}$, pole $= 2r^2\sqrt{3}$.

POWTÓRZENIE ALGEBRY

1. Wyprowadźcie wzory na sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego $ax^2+bx+c = 0$, gdzie $a \neq 0$ i $\Delta \geqslant 0$. Wypowiedzcie te wzory słowami.

2. Podajcie sposób rozumowania, na podstawie którego ustalicie znaki pierwiastków poniższych równań bez ich rozwiązywania:

a) $x^2-5x+4 = 0$ b) $x^2+8x+12 = 0$

c) $x^2-x-2 = 0$ d) $x^2+2x-8 = 0$

3. Ułóżcie równania kwadratowe mając dane ich pierwiastki:

a) -2 i 5, *b*) $-3-\sqrt{5}$ i $-3+\sqrt{5}$. Z jakiej postaci równania kwadratowego korzystacie?

4. Podajcie sposób rozumowania, który prowadzi do pamięciowego rozwiązania równań kwadratowych, np.

   a) $x^2-10x+16=0$, b) $x^2+2x-15=0$.

5. Podajcie określenie równania dwukwadratowego i napiszcie je w postaci ogólnej.

6. Omówcie sposób rozwiązania równania dwukwadratowego na przykładzie $x^4-26x^2+25=0$.

7. Podajcie określenie równania pierwiastkowego i napiszcie kilka przykładów takich równań.

8. Wymieńcie kolejne czynności przy rozwiązywaniu równania pierwiastkowego, w którym występuje tylko jeden pierwiastek, np. a) $6-\sqrt{2x-1}=x-2$, b) $2-\sqrt[3]{5x-2}=0$.

9. Jaka czynność przy rozwiązywaniu równań pierwiastkowych może spowodować wprowadzenie pierwiastków obcych? Wyjaśnijcie to na prostym przykładzie. Jak wykrywamy pierwiastki obce?

10. Omówcie sposób postępowania przy rozwiązywaniu równań pierwiastkowych postaci:

    a) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}-2=0$

    b) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x-3}-\sqrt{x+5}=0$.

11. Podajcie określenie funkcji i wymieńcie kilka przykładów zależności funkcyjnej między dwiema wielkościami.

12. Jakie znacie sposoby przedstawiania funkcji?

13. Co jest wykresem funkcji stopnia pierwszego $y=ax$? Jakie jest znaczenie współczynnika a?

14. Jak otrzymujemy wykres funkcji $y=ax+b$ z wykresu funkcji $y=ax$? Co oznacza na wykresie wyraz wolny b?

15. Jaki jest praktyczny sposób wykreślania funkcji liniowej $y=ax+b$? Omówcie na przykładach:

    a) $y=2x-5$, b) $y=-\frac{1}{3}x+15$

16. Co nazywamy miejscem zerowym funkcji? Jakie jest miejsce zerowe funkcji $y=ax+b$? Co oznacza na wykresie miejsce zerowe funkcji?

*17. Napiszcie równania:

a) prostej równoległej do osi OX i przechodzącej przez punkt $(0, -3)$,

b) prostej równoległej do osi OY i przechodzącej przez punkt $(2, 0)$,

c) osi OX,

d) osi OY.

18. Co znaczy rozwiązać układ dwu równań z dwiema niewiadomymi?

19. Jakie znacie metody rozwiązywania układu dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi? Omówcie te metody na przykładzie

$$\begin{cases} 5x-2y = 12 \\ 4x+3y = 5 \end{cases}$$

20. Co znaczy rozwiązać graficznie układ dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi? Czym są współrzędne punktu przecięcia się obrazów graficznych tych równań?

21. Kiedy układ dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi nazywamy oznaczonym, kiedy sprzecznym, a kiedy nieoznaczonym? Jaka jest ilustracja graficzna tych układów?

POWTÓRZENIE GEOMETRII

1. Narysujcie trójkąt prostokątny ABC, w którym $\sphericalangle C = 90°$ i poprowadźcie wysokość CD.

a) Wykażcie, że $\triangle ADC \sim \triangle ABC$,

b) Wykażcie, że $\triangle DBC \sim \triangle ABC$,

c) Wykażcie, że $\triangle ADC \sim \triangle DBC$.

2. Wypowiedzcie i udowodnijcie twierdzenie o przyprostokątnej trójkąta prostokątnego (z lekcji 64).

3. Wypowiedzcie i udowodnijcie twierdzenie Pitagorasa.

4. Wypowiedzcie i udowodnijcie twierdzenie o wysokości trójkąta prostokątnego opuszczonej z wierzchołka kąta prostego.

5. Zbudujcie odcinek będący średnią proporcjonalną dwóch danych odcinków a i b.

6. Co wiemy o trójkącie o kątach 30°, 60°, 90°?

ZADANIA

1. A) Sprawdzić, czy poniższe równania mają pierwiastki oraz podać ich sumę i iloczyn:

a) $x^2-9x+18=0$ b) $x^2+9x+14=0$

c) $4x^2-11x-3=0$ d) $2x^2+5x=0$ e) $6x^2-1=0$

B) W trójkącie prostokątnym poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego. Wykazać, że każde dwa trójkąty na tym rysunku są podobne.

2. A) Ułożyć równania kwadratowe mając ich pierwiastki:

a) 3 i 5, b) $-\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{4}$, c) $4-\sqrt{6}$ i $4+\sqrt{6}$

d) $-\frac{2}{5}$ i 0, e) $-\sqrt{7}$ i $\sqrt{7}$.

B) Wypowiedzieć i zilustrować na rysunku trzy twierdzenia o trójkącie prostokątnym.

3. A) Sprawdzić, czy poniższe równania mają pierwiastki oraz nie rozwiązując tych równań określić znaki pierwiastków:

a) $4x^2+8x+3=0$, b) $2x^2-x-6=0$,

c) $x^2-9x+8=0$, d) $x^2-10=0$.

B) Udowodnić twierdzenie Pitagorasa.

4. A) Rozwiązać równanie

$$2(x^2-3)^2-(x^2-6)(x^2+6)=2x^2+9$$

B) Dane są dwa odcinki a i b. Zbudować odcinek będący średnią proporcjonalną tych odcinków.

5. A) Rozwiązać równanie

$$x^2+\frac{2(x-7)}{x^2-1}=\frac{2(x+2)}{x+1}$$

B) Obliczyć przekątną kwadratu o boku a.

6. A) Wykazać, że poniższe równania nie mają pierwiastków:

a) $x^4+3x^2+2=0$, b) $x^4-5x^2+7=0$.

B) Obliczyć bok kwadratu, którego przekątna równa się d.

7. A) Rozwiązać równanie

$$\sqrt{3x-\sqrt{x+2}} = 2$$

B) Obliczyć wysokość i pole trójkąta równobocznego o boku a.

8. A) Rozwiązać równanie

$$\sqrt{6-\sqrt[3]{3x-1}} = 2$$

B) Obliczyć bok kwadratu wpisanego w koło o promieniu r

9. A) Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x-6}+\frac{x+5}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}$$

B) Obliczyć pole trójkąta równoramiennego o bokach 15 cm, 15 cm, 18 cm.

10. A) Rozwiązać równanie

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1} = 2$$

B) W trójkącie prostokątnym przyprostokątne wynoszą 6 cm i 8 cm. Obliczyć przeciwprostokątną i wysokość opuszczoną z wierzchołka kąta prostego.

11. A) Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+3} = 0$$

B) Obliczyć obwód rombu, którego przekątne wynoszą 28 cm i 96 cm.

12. A) W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna wynosi 13 cm, a przyprostokątne różnią się o 7 cm. Obliczyć przyprostokątne. Wskazówka: Ułożyć równanie.

B) W kole o promieniu 6,5 cm narysowano cięciwę odległą od środka o 5,6 cm. Obliczyć długość tej cięciwy.

13. A) W trójkącie prostokątnym wysokość wynosi 6 cm i dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki różniące się o 9 cm. Obliczyć te odcinki. Wskazówka: Ułożyć równanie.

B) Obliczyć promień okręgu opisanego na prostokącie o bokach 5 cm i 12 cm.

14. A) W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna wynosi 40 cm, a wysokość opuszczona na przeciwprostokątną równa się 16 cm. Obliczyć odcinki, na jakie wysokość podzieliła przeciwprostokątną. Wskazówka: Ułożyć równanie.

B) Obliczyć pole rombu o boku a i kącie ostrym $60°$.

15. A) Wykreślić funkcje liniowe:

$$\text{a) } y = \frac{1}{2}x - 3, \quad \text{b) } y = -\frac{1}{3}x + 4$$

Jakie są współrzędne punktów przecięcia obrazów graficznych tych funkcji z osiami OX i OY?

B) Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 12 cm i 16 cm. Obliczyć przeciwprostokątną i rzuty przyprostokątnych na przeciwprostokątną.

16. A) Wykonać wykresy poniższych równań:

a) $y+5=0$, b) $x+y=0$, c) $x-y=0$,
*d) $x=3$, *e) $x=0$, *f) $y=0$, g) $2x-y=1$

B) W trójkącie prostokątnym rzuty przyprostokątnych na przeciwprostokątną wynoszą 5 cm i 20 cm. Obliczyć obie przyprostokątne i wysokość poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego.

17. A) Rozwiązać układ równań metodą podstawiania

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-4y=-25 \end{cases}$$

B) Co wiemy o trójkącie prostokątnym, w którym jeden z kątów ostrych równa się $30°$? Krótsza przyprostokątna w takim trójkącie równa się a. Obliczyć przeciwprostokątną i drugą przyprostokątną.

18. A) Rozwiązać układ równań metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} 4x-3y=15 \\ 3x-2y=11 \end{cases}$$

B) Obliczyć bok trójkąta równobocznego wpisanego w koło o promieniu r.

19. A) Rozwiązać graficznie układy równań:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 4x-y=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y=7 \\ 2x-4y=-7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+y=8 \\ 6x+2y=16 \end{cases}$$

Jak nazwiemy każdy z tych układów?

B) Obliczyć pole równoległoboku, którego boki wynoszą a i b a kąt ostry ma 45°.

20. A) Rozwiązać graficznie układy równań:

$$\begin{cases} x+2y=-6 \\ 5x-4y=-16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+\frac{1}{2}y=3 \\ 2x+y=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x-y=1 \\ 10x-2y=6 \end{cases}$$

Jak nazwiemy każdy z tych układów?

B) Obliczyć pole trójkąta ABC, w którym $AB=c$, $BC=a$ $\sphericalangle B=30°$.

Algebra

Trójmian kwadratowy (lekcje 75 i 76). Funkcja drugiego stopnia i jej wykres (lekcje od 77 do 81). Algebraiczne i graficzne rozwiązywanie układów równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi w prostych przypadkach (lekcje od 82 do 86). Zastosowanie układów równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi do rozwiązywania zadań tekstowych (lekcje od 87 do 89).

Geometria

Zadania z treścią geometryczną prowadzące do równań lub układów równań stopnia drugiego (lekcje 90 i 91). Konstruowanie odcinków według wzorów algebraicznych (lekcje 92 i 93). Pole koła i pole wycinka kołowego. Długość okręgu i długość łuku okręgu (lekcje od 94 do 96).

Powtórzenie algebry
Powtórzenie geometrii
Pytania i zadania

LEKCJE 75 i 76

Trójmian kwadratowy

Trójmianem kwadratowym nazywamy wyrażenie postaci

$$ax^2+bx+c,$$

gdzie $a \neq 0$ oraz a, b i c są danymi liczbami.

Z trójmianem kwadratowym zetknęliśmy się już poprzednio. Był on lewą stroną równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$. Gdy na miejsce niewiadomej x podstawialiśmy pierwiastki x_1 lub x_2 (oczy-

wiście, jeśli istniały), to lewa strona równania, czyli trójmian kwadratowy ax^2+bx+c, przybierał wartość zero. Teraz nie będziemy się ograniczali do podstawiania na miejsce x takich wartości, dla których trójmian ax^2+bx+c równa się zeru, ale na miejsce x będziemy podstawiać dowolne wartości liczbowe; dlatego x nazywać będziemy zmienną. Wartość trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c zależeć teraz będzie od wartości zmiennej x.

Ponieważ każdej wartości zmiennej x odpowiada jedna i tylko jedna wartość trójmianu kwadratowego, więc trójmian inaczej nazywać będziemy funkcją kwadratową. Funkcję kwadratową zapisywać będziemy:

(A) $$y = ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$$

Trójmian kwadratowy przekształcimy i nadamy mu inną postać. Wyłączamy a poza nawias:

$$y = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

Wyrażenie $x^2+\frac{b}{a}x$ potraktujemy jako dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia kwadratu dwumianu według wzoru $(m+n)^2 = m^2+2mn+n^2$.

x^2 jest kwadratem pierwszego wyrazu x,

$\frac{b}{a}x$ jest podwojonym iloczynem wyrazu pierwszego x przez drugi, co staje się bardziej widoczne z postaci $\frac{b}{a}x = 2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}$.

Do pełnego kwadratu dwumianu brakuje nam kwadratu drugiego wyrazu, tj. $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Dodajemy i jednocześnie odejmujemy $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, aby wartość wyrażenia nie uległa zmianie.

Otrzymujemy

$$y = a\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$

Z trzech pierwszych wyrazów w nawiasie tworzymy kwadrat dwumianu

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

Dwa ostatnie wyrazy w nawiasie sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Wyrażenie b^2-4ac jest nam znane. Nazywać je będziemy wyróżnikiem trójmianu kwadratowego i oznaczać literą Δ

$$\Delta = b^2-4ac$$

Trójmian kwadratowy przybiera postać, którą nazywać będziemy **postacią kanoniczną**

(B) $$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Rozpatrzmy trzy przypadki, gdy $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ i $\Delta < 0$.

I przypadek: $\Delta > 0$

Jeżeli $\Delta > 0$, to $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ i $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$

a zatem

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

W nawiasie kwadratowym otrzymaliśmy różnicę kwadratów dwu wyrażeń, którą rozkładamy na iloczyn sumy tych wyrażeń przez ich różnicę.

$$y = a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

czyli

$$y = a\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Oznaczmy

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ i } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

wtedy

$$y = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Jeżeli zamiast x podstawimy x_1 bądź x_2, to trójmian przybierze wartość równą zeru, a więc x_1 i x_2 są miejscami zerowymi trójmianu.

Miejscem zerowym (inaczej pierwiastkiem) wielomianu nazywamy taką wartość zmiennej, przy której wielomian przybiera wartość zero.

Tak więc, jeżeli $\Delta > 0$, to trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, ma dwa miejsca zerowe wyrażone wzorami

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ i } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

i rozkłada się na iloczyn współczynnika a przez dwa czynniki stopnia pierwszego względem zmiennej podług wzoru

(C) $$y = a(x-x_1)(x-x_2)$$

II przypadek: $\Delta = 0$

Jeśli $\Delta = 0$, to również $\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ i wtedy z postaci (B) trójmianu kwadratowego otrzymamy

$$y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

Aby znaleźć miejsce zerowe trójmianu, należy rozwiązać równanie

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Wiemy, że równanie tej postaci ma jeden podwójny pierwiastek

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Trójmian przybierze postać

$$y = a(x-x_1)^2$$

Tak więc, jeżeli $\Delta = 0$, to trójmian kwadratowy ma jedno podwójne miejsce zerowe wyrażone wzorem

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

i rozkłada się na iloczyn współczynnika a przez kwadrat dwumianu:

$$y = a(x-x_1)^2$$

III przypadek: $\Delta < 0$

Jeżeli $\Delta < 0$, to $-\Delta > 0$ i $-\Delta = (\sqrt{-\Delta})^2$; $\frac{-\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$

Trójmian przybierze postać

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

Wyrażenie w nawiasie jest sumą kwadratów, która jest zawsze dodatnia, gdyż drugi składnik jest dodatni. Nie ma więc takiej wartości zmiennej, przy której trójmian przyjąłby wartość równą zeru. Wiemy również, że suma kwadratów nie rozkłada się na iloczyn czynników.

Tak więc, jeżeli $\Delta < 0$, to trójmian kwadratowy nie ma miejsc zerowych i nie rozkłada się na iloczyn czynników stopnia pierwszego względem zmiennej.

Przykład 1. Rozłożyć na czynniki następujące trójmiany:

a) $y = x^2-3x+2$,
b) $y = -2x^2-3x+2$,
c) $y = 3x^2-12x+12$,
d) $y = -10x^2-2x-4$.

a) Badamy wyróżnik: $\Delta = 9-8 = 1 > 0$.
Trójmian ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
Stosujemy wzór: $y = a(x-x_1)(x-x_2)$
i otrzymujemy:

$$y = (x-1)(x-2)$$

b) $\Delta = 9+16 = 25 > 0$. Trójmian ma dwa miejsca zerowe

$$x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Wobec tego $y = -2(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

c) $\Delta = 144-144 = 0$. Trójmian ma jedno podwójne miejsce zerowe

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{6} = 2$$

Stosujemy wzór: $y = a(x-x_1)^2$
i otrzymujemy:

$$y = 3(x-2)^2$$

d) $\Delta = 4-160 = -156 < 0$. Trójmian nie ma miejsc zerowych i nie rozkłada się na iloczyn czynników stopnia pierwszego.

Przykład 2. Uprościć ułamek:

$$\frac{3x^2-10x+3}{3x^2+5x-2}$$

Licznik L i mianownik M tego ułamka rozkładamy na czynniki. $L = 3x^2-10x+3$; $\Delta = 100-36 = 64 > 0$ — istnieją dwa różne miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{1}{3} \text{ i } x_2 = 3.$$

$$L = 3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)$$

$M = 3x^2+5x-2$; $\Delta = 25+24 = 49 > 0$ — istnieją 2 różne miejsca zerowe

$$x_1 = -2 \text{ i } x_2 = \frac{1}{3}.$$

$$M = 3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

Zastrzegamy, że ułamek dany ma sens liczbowy, gdy $x \neq -2$ i $x \neq \frac{1}{3}$, tj. gdy jego mianownik jest różny od zera.

Otrzymujemy

$$\frac{3x^2-10x+3}{3x^2+5x-2} = \frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)}{3\,(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \frac{x-3}{x+2}$$

Uwaga. Uprościliśmy ułamek przez $3\left(x-\frac{1}{3}\right)$, co wolno nam było uczynić przy zastrzeżeniu, że $x \neq \frac{1}{3}$.

Przykład 3. Rozwiązać równanie

$$\frac{6}{x^2+x-6} - \frac{4}{x^2+x-2} = \frac{3}{x^2-4}$$

Pozbywamy się ułamków mnożąc obie strony równania przez wspólny mianownik. Dla jego znalezienia dokonamy rozkładu poszczególnych mianowników na czynniki:

$y_1 = x^2+x-6$	$y_2 = x^2+x-2$,	$y_3 = x^2-4$
$\Delta = 25 > 0$	$\Delta = 9 > 0$	
$x_1 = -3,\ x_2 = 2$	$x_1 = -2,\ x_2 = 1$	
$y_1 = (x+3)\,(x-2)$	$y_2 = (x+2)\,(x-1)$	$y_3 = (x+2)\,(x-2)$

Równanie dane możemy przedstawić w postaci

$$\frac{6}{(x+3)\,(x-2)} - \frac{4}{(x+2)\,(x-1)} = \frac{3}{(x+2)\,(x-2)}$$

Mnożąc obie strony równania przez wspólny mianownik

$$(x+3)\,(x+2)\,(x-2)\,(x-1)$$

otrzymamy

$$6(x+2)\,(x-1)-4(x-2)\,(x+3) = 3(x+3)\,(x-1)$$

Po wykonaniu wskazanych działań, przeniesieniu wszystkich wyrazów na lewą stronę i redukcji wyrazów podobnych dochodzimy do równania

$$x^2+4x-21=0$$

skąd

$$x_1=-7 \text{ i } x_2=3$$

Sprawdzenie

dla $x=-7$ mamy: $L=\frac{6}{49-7-6}-\frac{4}{49-7-2}=\frac{6}{36}-\frac{4}{40}=$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$

$$P=\frac{3}{49-4}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}, \text{ a więc } L=P.$$

dla $x=3$ mamy: $L=\frac{6}{9+3-6}-\frac{4}{9+3-2}=\frac{6}{6}-\frac{4}{10}=$

$$=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

$$P=\frac{3}{9-4}=\frac{3}{5}, \text{ a więc } L=P.$$

Sprawdzenie wykazało, że równanie dane ma dwa pierwiastki:

$$x_1=-7 \text{ i } x_2=3$$

Pytania

1. Doprowadźcie postać ogólną trójmianu kwadratowego do postaci kanonicznej.
2. Podajcie określenie miejsca zerowego trójmianu. Jaki jest warunek istnienia miejsc zerowych trójmianu kwadratowego?
3. Wyprowadźcie wzory na miejsca zerowe trójmianu przy założeniu, że $\Delta \geqslant 0$.
4. Kiedy trójmian daje się rozłożyć na iloczyn czynników stopnia pierwszego?
5. Napiszcie i omówcie wzory, na podstawie których rozkładacie trójmian kwadratowy na czynniki.
6. W jakim wypadku nie można trójmianu kwadratowego rozłożyć na czynniki?

Zadania

1. Doprowadźcie trójmiany kwadratowe do postaci kanonicznej:

a) $x^2-10x+9$
b) x^2+6x-3
c) $-x^2+5x-4$
d) $-x^2+3x+4$
*e) $2x^2-8x$
*f) $2x^2-5x$
*g) $3x^2-10x+3$
*h) $-2x^2+5x-2$
*i) $10x^2+8x+2$
*j) $-3x^2+18x-27$

2. Rozłóżcie na czynniki następujące trójmiany kwadratowe:

a) $x^2-29x+100$
b) $2x^2-12x-14$
c) $-x^2+x+110$
*d) x^2-4x+1
*e) $-7x^2+22x-3$
*f) $-4x^2-4x-1$
*g) $2x^2+x-10$
h) $4x^2-8$
i) $16x^2-8x+1$
j) $5x^2-3x$
*k) $x^2-12x+36$
*l) $-6x^2-8x+30$
*m) $-3x^2+9x-6$

3. Uprośćcie ułamki algebraiczne:

a) $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2+x-12}$
*b) $\dfrac{x^2+9x+20}{x^2+2x-8}$
c) $\dfrac{x^2-5x}{2x^2-11x+5}$
d) $\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$
*e) $\dfrac{2x^2-7x+3}{2x^2-5x+2}$
f) $\dfrac{16x^2-17x+1}{x^2-1}$
*g) $\dfrac{3x^2+4x-15}{3x^2-11x+10}$
*h) $\dfrac{25x^2-10x+1}{5x^2+9x-2}$

4. Rozwiążcie równania:

a) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3}{x^2+x-2}=\dfrac{7}{10}$

b) $\dfrac{8}{x^2-8x+15}+\dfrac{9}{x-5}+\dfrac{5}{4}=0$

*c) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2}{3}$

*d) $\dfrac{2x}{x^2-2x-3}-\dfrac{x-3}{x^2-3x-4}=\dfrac{1}{2x-8}$

*e) $\dfrac{5}{x^2-5x}-\dfrac{4}{x^2-25}+\dfrac{6}{x^2-3x-10}=0$

*f) $\dfrac{x+1}{2x^2-x-1}+\dfrac{3x}{4x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}$

Odpowiedzi

1. a) $(x-5)^2-16$; b) $(x+3)^2-12$; c) $-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$;

d) $-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$; e) $2(x-2)^2-8$; f) $2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$;

g) $3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{16}{3}$; h) $-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$; i) $10\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{2}{5}$;

j) $-3(x-3)^2$.

2. a) $(x-4)(x-25)$; b) $2(x+1)(x-7)$; c) $-(x+10)\cdot(x-11)$;

d) $(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$; e) $-7\left(x-\frac{1}{7}\right)(x-3)=-(7x-1)(x-3)$;

f) $-(2x+1)^2$; g) $2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-2)$; h) $4(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$; i) $(4x-$

$-1)^2$; j) $5x\left(x-\frac{3}{5}\right)$; k) $(x-6)^2$; l) $-6(x+3)\left(x-\frac{5}{3}\right)$; m) $-3(x-$

$-1)(x-2)$.

3. a) $\dfrac{x-5}{x+4}$; b) $\dfrac{x+5}{x-2}$; c) $\dfrac{x}{2x-1}$; d) $\dfrac{x+3}{x-1}$;

e) $\dfrac{x-3}{x-2}$; f) $;\dfrac{16x-1}{x+1}$ g) $\dfrac{x+3}{x-2}$; h) $\dfrac{5x-1}{x+2}$.

4. a) $-\frac{8}{7}$ i 3; b) $-\frac{1}{5}$ i 1; c) $\frac{1}{2}$ i 4; d) -3 i 5; e) $-\frac{50}{7}$ i -1;

f) 0 i 2.

LEKCJA 77

Wykresy trójmianu kwadratowego

(przypadek $y = ax^2$)

Po wstępnych wiadomościach o trójmianie kwadratowym przejdziemy obecnie do omówienia dalszych jego własności.

Weźmy trójmian kwadratowy

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Załóżmy, że $b = 0$ i $c = 0$, otrzymamy wówczas funkcję

$$y = ax^2$$

którą wykreślimy dla różnych wartości współczynnika a.

1. Dla $a = 1$, mamy funkcję $y = x^2$

Układamy tabelkę zmienności funkcji:

x	$\ldots$	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$\ldots$
$y = x^2$	$\ldots$	9	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	0	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9	$\ldots$

Każdej parze liczb wziętej z tej tabelki przyporządkujemy punkt w układzie osi współrzędnych. Po połączeniu wyznaczonych punktów linią ciągłą otrzymamy krzywą zwaną **parabolą** (rys. 125).

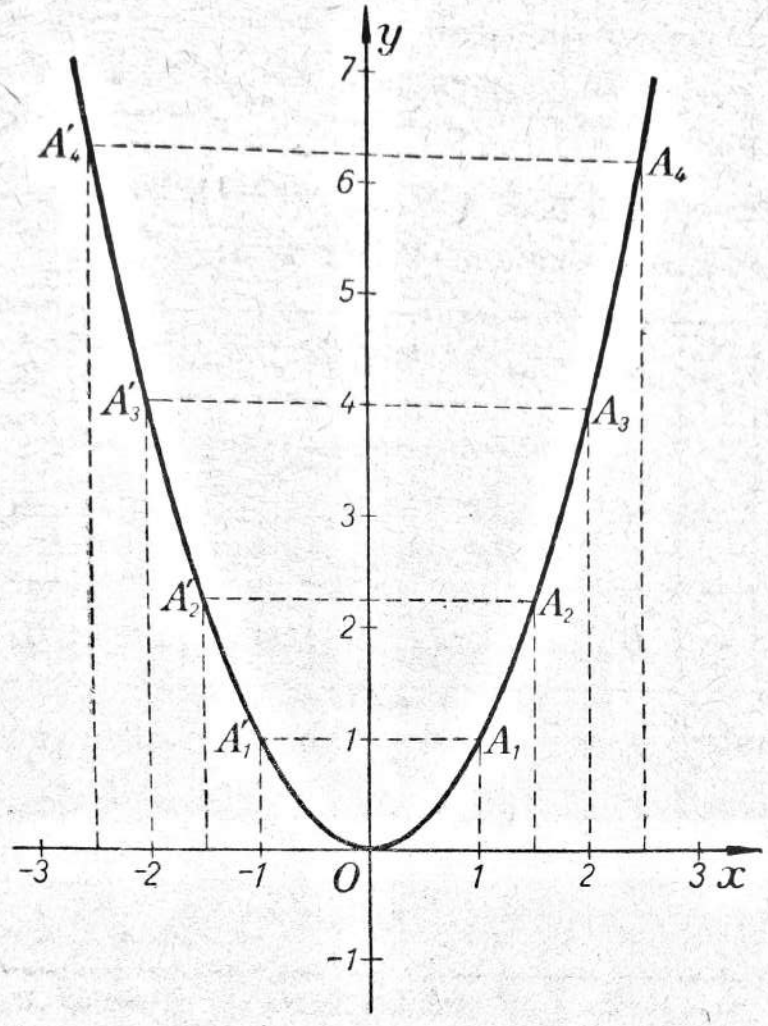
Na podstawie tabelki i wykresu omówimy własności funkcji $y = x^2$:

a) Funkcja y przybiera wartości dodatnie i tylko w szczególnym przypadku wartość zero dla x równego zeru. Wartość zero jest zatem najmniejszą wartością, jaką funkcja osiąga. Mówimy, że jest to minimum funkcji $y = x^2$ i oznaczamy

$$y_{\min} = 0 \quad \text{dla } x = 0$$

Parabola położona jest w ćwiartce I i II oraz przechodzi przez początek układu.

b) Jak widzimy z tabelki, funkcja przyjmuje każdą wartość do-



Rys. 125

datnią dwukrotnie dla wartości x równych co do wartości bezwzględnej, a różnych co do znaku; np.

$$y = 4 \text{ dla } x = -2 \text{ i } x = 2$$

$$y = 6\frac{1}{4} \text{ dla } x = -2\frac{1}{2} \text{ i } x = 2\frac{1}{2}$$

Odpowiadające punkty paraboli są symetryczne względem osi OY (A_3 i A'_3; A_4 i A'_4), a więc parabola jest symetryczna względem osi OY.

c) Oś symetrii przecina parabolę w jednym punkcie, który nazywa się **wierzchołkiem** paraboli. W danym wypadku (tj. dla $y = x^2$) wierzchołek leży w początku układu i jest punktem najniżej położonym na paraboli. Rzędnej wierzchołka odpowiada minimum funkcji ($y = 0$).

d) Funkcja $y = x^2$ ma jedno miejsce zerowe $x = 0$.

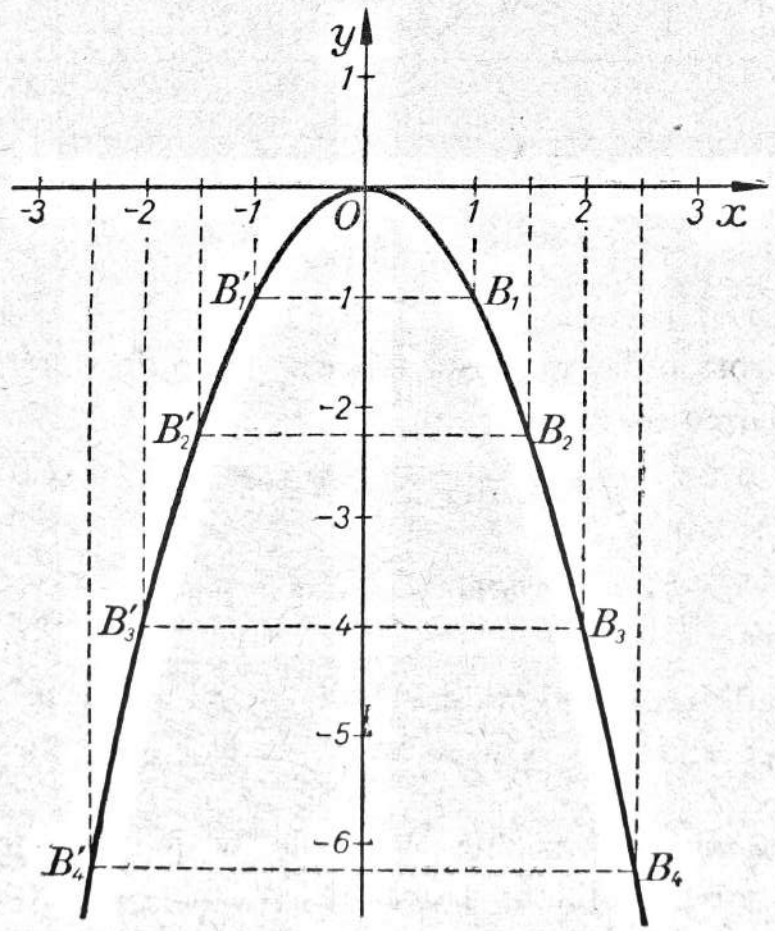
Uwaga. Dwie części paraboli położone po obu stronach osi symetrii nazywają się **ramionami** paraboli. O wykresie funkcji $y = x^2$ mówimy, że przedstawia parabolę zwróconą ramionami do góry.

2. Wykres funkcji $y = -x^2$ $(a = -1)$.

Układamy tabelkę zmienności funkcji:

x	...	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	...
$y = -x^2$	...	-9	$-6\frac{1}{4}$	-4	$-2\frac{1}{4}$	-1	0	-1	$-2\frac{1}{4}$	-4	$-6\frac{1}{4}$	-9	...
Punkty	...	—	B'_4	B'_3	B'_2	B'_1	O	B_1	B_2	B_3	B_4	—	...

Wykresem funkcji $y = -x^2$ jest parabola przedstawiona na rys. 126.



Rys. 126

Na podstawie tabelki i wykresu omówimy własności funkcji $y = -x^2$.

a) Funkcja y przybiera wartości ujemne i tylko w szczególnym wypadku wartość zero dla x równego zeru. Wartość zero jest zatem największą wartością, jaką funkcja $y = -x^2$ osiąga. Mówimy, że jest to maximum funkcji $y = -x^2$ i oznaczamy

$$y_{\max} = 0 \text{ dla } x = 0$$

Parabola położona jest w ćwiartce III i IV oraz przechodzi przez początek układu.

b) Osią symetrii paraboli jest oś OY (wyjaśnijcie dlaczego?).

c) Wierzchołek paraboli znajduje się w początku układu i jest obecnie punktem najwyżej położonym na paraboli.

d) Parabola zwrócona jest ramionami ku dołowi.

e) Dla tej samej wartości zmiennej x funkcje: $y = x^2$ i $y = -x^2$ przybierają wartości przeciwne. Odpowiadające punkty obu wykresów są symetryczne względem osi OX. Stąd wniosek:

Parabole będące wykresami funkcji $y = x^2$ i $y = -x^2$ są symetryczne względem osi OX.

3. Wykresy $y = ax^2$.

Wykreślmy funkcję $y = ax^2$, zakładając kolejno:

$$a = +5, \quad a = -5, \quad a = +2, \quad a = -2, \quad a = +\frac{1}{2}, \quad a = -\frac{1}{2},$$

$$a = +\frac{1}{4}, \quad a = -\frac{1}{4}.$$

Otrzymamy funkcje:

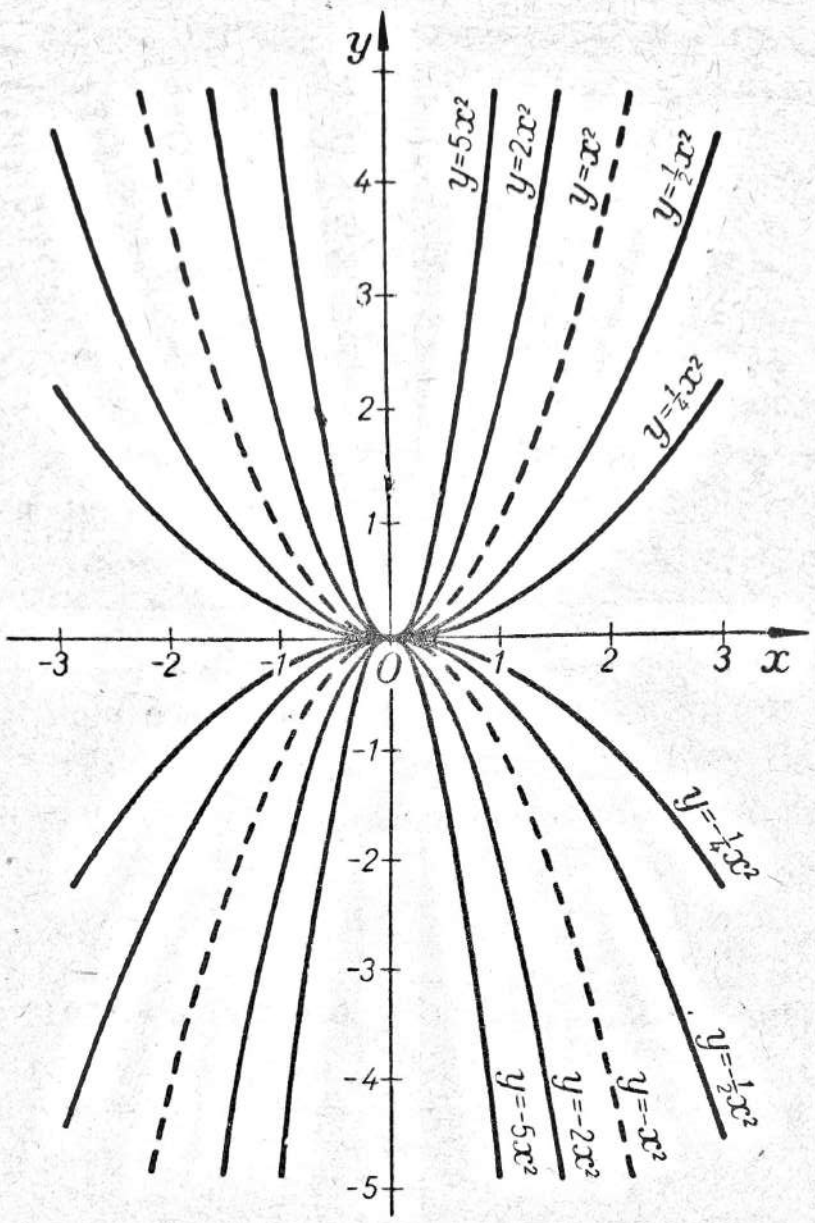
$$y = 5x^2, \; y = 2x^2, \; y = \frac{1}{2}x^2, \; y = \frac{1}{4}x^2,$$

$$y = -5x^2, \; y = -2x^2, \; y = -\frac{1}{2}x^2, \; y = -\frac{1}{4}x^2.$$

Ułóżcie tabelki zmienności dla poszczególnych funkcji. Wykonajcie wykresy i porównajcie je z rys. 127.

Zbierając nasze spostrzeżenia możemy powiedzieć:

Wykresem funkcji $y = ax^2$ jest parabola, której wierzchołek znajduje się w początku układu i która jest symetrycznie położona względem osi OY, przy tym



Rys. 127

a) jeżeli współczynnik $a > 0$, to parabola zwrócona jest ramionami do góry i funkcja ma minimum

$$y_{\min} = 0 \text{ dla } x = 0$$

b) jeżeli $a < 0$, to parabola zwrócona jest ramionami do dołu i funkcja ma maximum

$$y_{\max} = 0 \text{ dla } x = 0$$

Pytania

1. Napiszcie ogólną postać trójmianu kwadratowego.
2. Napiszcie kilka szczególnych postaci trójmianu kwadratowego. Jaka postać trójmianu jest najprostsza?

3. Wykreślcie funkcję $y = x^2$. Omówcie własności tej funkcji i jej wykresu.

4. Wykreślcie funkcję $y = -x^2$. Omówcie własności tej funkcji i jej wykresu.

5. Która z funkcji $y = x^2$ i $y = -x^2$ posiada maximum, a która minimum? Jaka jest wartość tego maximum i minimum i dla jakiej wartości zmiennej x?

6. Czym się różnią wykresy $y = x^2$ i $y = -x^2$, a jakie własności mają wspólne?

7. Co przedstawia na wykresie funkcja $y = ax^2$ i jakie jest znaczenie współczynnika a?

Zadania

1. Wykreślcie funkcje kwadratowe:

a) $y = 3x^2$
b) $y = 6x^2$
c) $y = \frac{1}{3}x^2$
d) $y = \frac{1}{6}x^2$
e) $y = -3x^2$
f) $y = -6x^2$
g) $y = -\frac{1}{3}x^2$
h) $y = -\frac{1}{6}x^2$

LEKCJE 78 i 79

Wykresy funkcji kwadratowych

$y = ax^2+c$ i $y = a\ (x-p)^2$

Rozpatrzmy najpierw funkcję mającą postać

$$y = ax^2+c$$

Weźmy dla przykładu $a = 1$ i $c = \pm 2$. Otrzymamy dwie funkcje mające postać

$$y = x^2+2 \text{ i } y = x^2-2$$

Układamy tabelki zmienności tych funkcji. Tabelki składają

się teraz z trzech wierszy, przy czym środkowy wiersz obrazuje zmienność funkcji $y = x^2$

$$y = x^2+2$$

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = x^2$	...	9	4	1	0	1	4	9	...
$y = x^2+2$	...	11	6	3	2	3	6	11	...

$$y = x^2-2$$

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = x^2$	...	9	4	1	0	1	4	9	...
$y = x^2-2$	...	7	2	-1	-2	-1	2	7	...

Szkicujemy wykresy funkcji $y = x^2+2$ i $y = x^2-2$ (rys. 128 i 129).

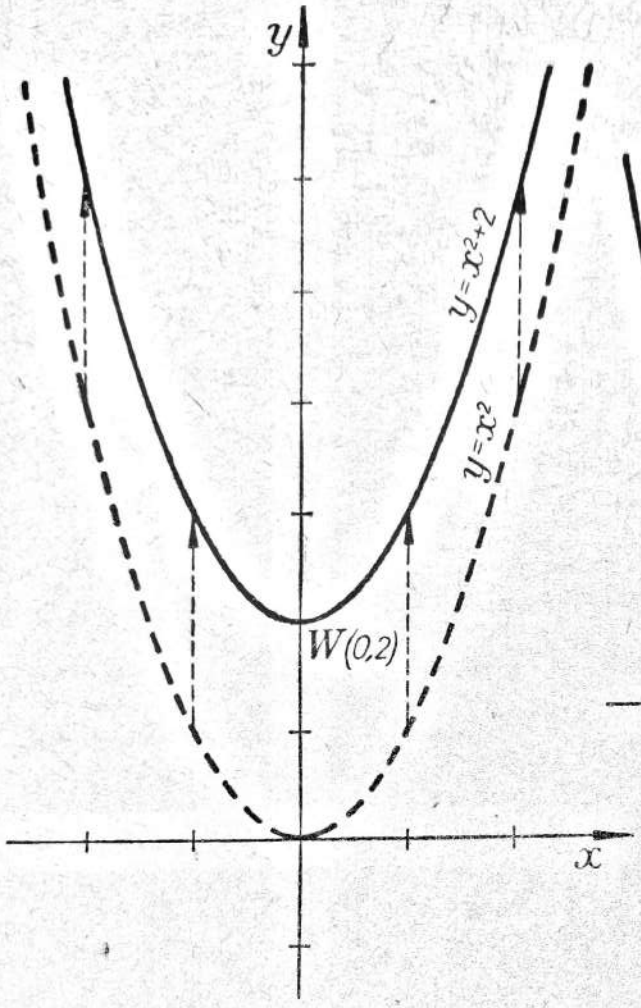
Na podstawie tabelek i wykresów możemy powiedzieć, że: Dla tych samych wartości zmiennej x, wartości funkcji $y = x^2+2$ są stale większe o 2 od odpowiednich wartości funkcji $y = x^2$.

Stąd wniosek: aby wykreślić funkcję $y = x^2+2$, przesuwamy wykres funkcji (parabolę) $y = x^2$ równolegle do osi OY o dwie jednostki w kierunku dodatnim (w górę).

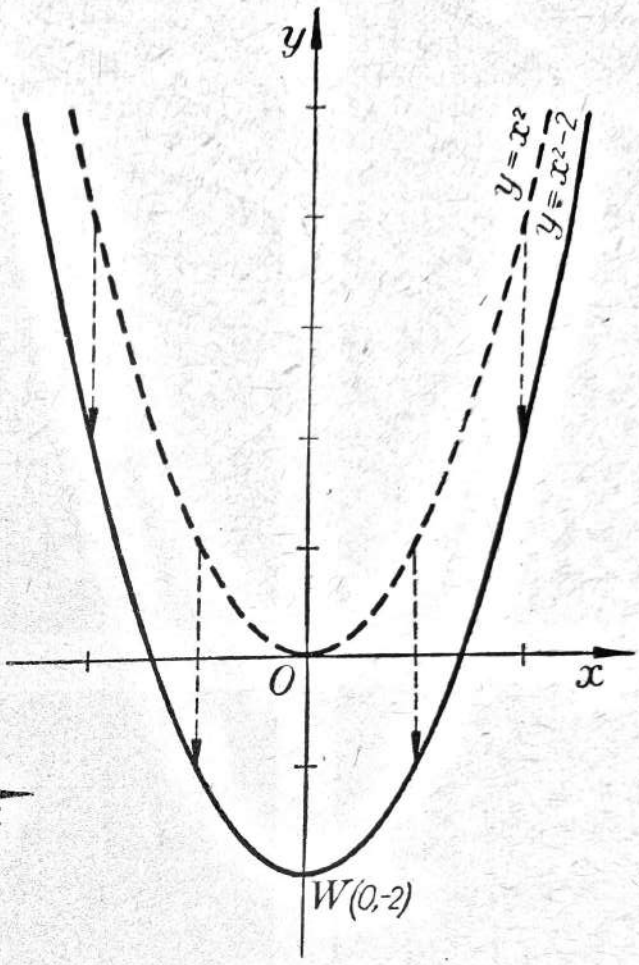
I podobnie: aby wykreślić funkcję $y = x^2-2$, przesuwamy wykres funkcji $y = x^2$ równolegle do osi OY o dwie jednostki w kierunku ujemnym (w dół).

Rozpatrzmy jeszcze sprawę miejsc zerowych obu funkcji, a więc tych wartości zmiennej x, przy których trójmian przyjmuje wartość zero.

Funkcja $y = x^2+2$ nie ma miejsc zerowych (równanie niezupełne $x^2+2 = 0$ nie ma pierwiastków).



Rys. 128



Rys. 129

Funkcja $y = x^2-2$ ma dwa różne miejsca zerowe, które znajdujemy rozwiązując równanie $x^2-2 = 0$

$$x_1 = -\sqrt{2} \text{ i } x_2 = \sqrt{2}$$

Miejscom zerowym funkcji odpowiadają na wykresie odcięte punktów przecięcia paraboli z osią OX. Wykres funkcji $y = x^2-2$ przecina oś OX w dwu punktach: $(-\sqrt{2}, 0$ i $\sqrt{2}, 0)$.

Wykres zaś funkcji $y = x^2+2$ nie przecina osi OX.

Wnioski nasze co do sposobu wykreślania funkcji $y = x^2+2$ i $y = x^2-2$ możemy uogólnić i powiedzieć:

1. Aby wykreślić funkcję $y = ax^2+c$, przesuwamy wykres funkcji $y = ax^2$ równolegle do osi OY o c jednostek, przy tym:

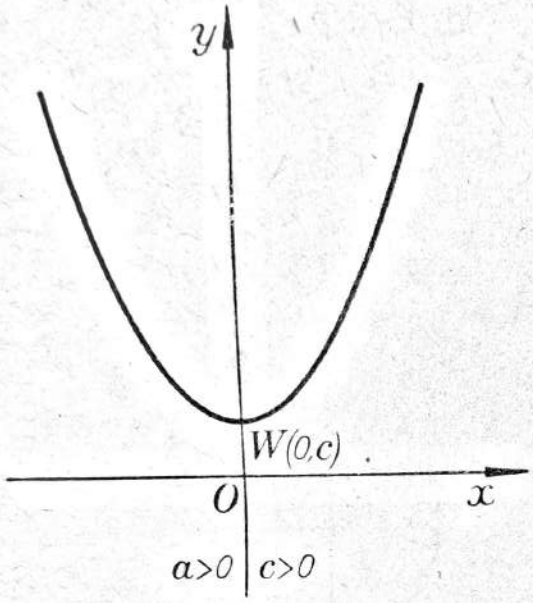
a) jeżeli $c > 0$, to w kierunku dodatnim (w górę),

b) jeżeli $c < 0$, to w kierunku ujemnym (w dół).

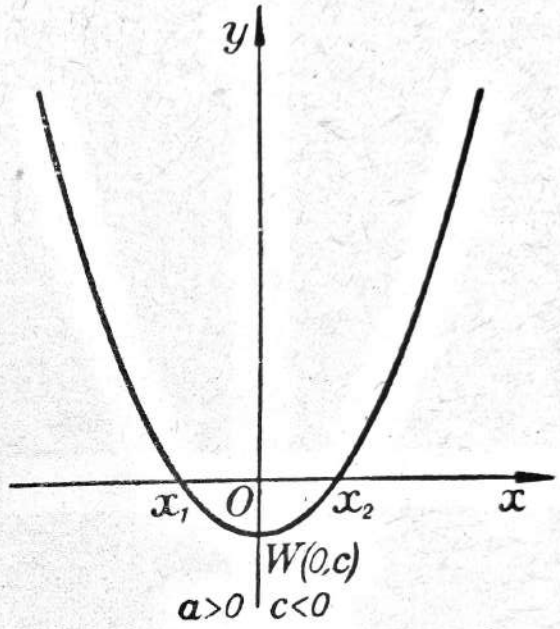
Wierzchołek paraboli ma więc współrzędne (0, c).

2. Jeżeli a i c mają znaki różne, to parabola przecina oś OX w dwu punktach. Jeżeli a i c mają znaki jednakowe, to parabola nie przecina osi OX.

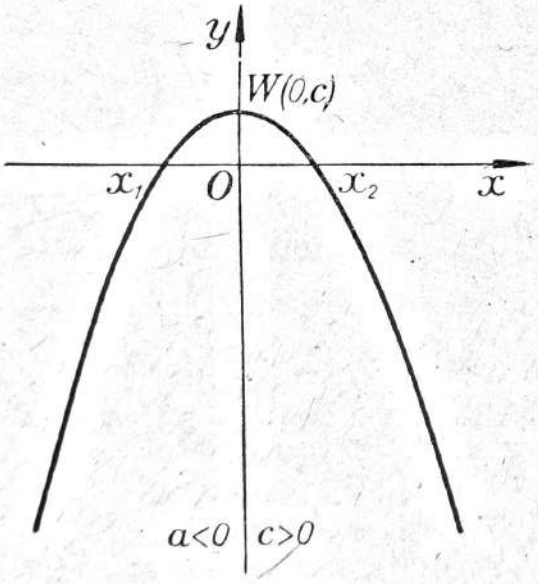
3. Osią symetrii paraboli jest oś OY.



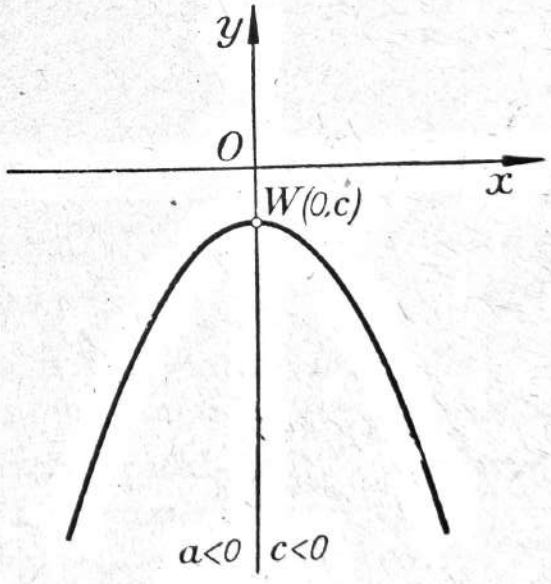
Rys. 130



Rys. 131



Rys. 132



Rys. 133

4. Zależnie od znaków a i c możemy mieć różne położenia paraboli, co ilustrują rysunki 130, 131, 132 i 133.

Rozpatrzmy teraz funkcję mającą postać

$$y = a(x-p)^2$$

Weźmy dla przykładu $a = 1$ i $p = \pm 3$. Otrzymamy dwie funkcje:

$$y = (x-3)^2 \text{ i } y = (x+3)^2$$

Układamy tabelki zmienności tych funkcji, przy czym środkowy wiersz obrazuje zmienność funkcji $y = x^2$.

$$y = (x-3)^2$$

x	...	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$y = x^2$	...	1	0	1	4	9	16	25	36	49	...
$y = (x-3)^2$	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...

$$y = (x+3)^2$$

x	...	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
$y = x^2$	...	49	36	25	16	9	4	1	0	1	...
$y = (x+3)^2$	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...

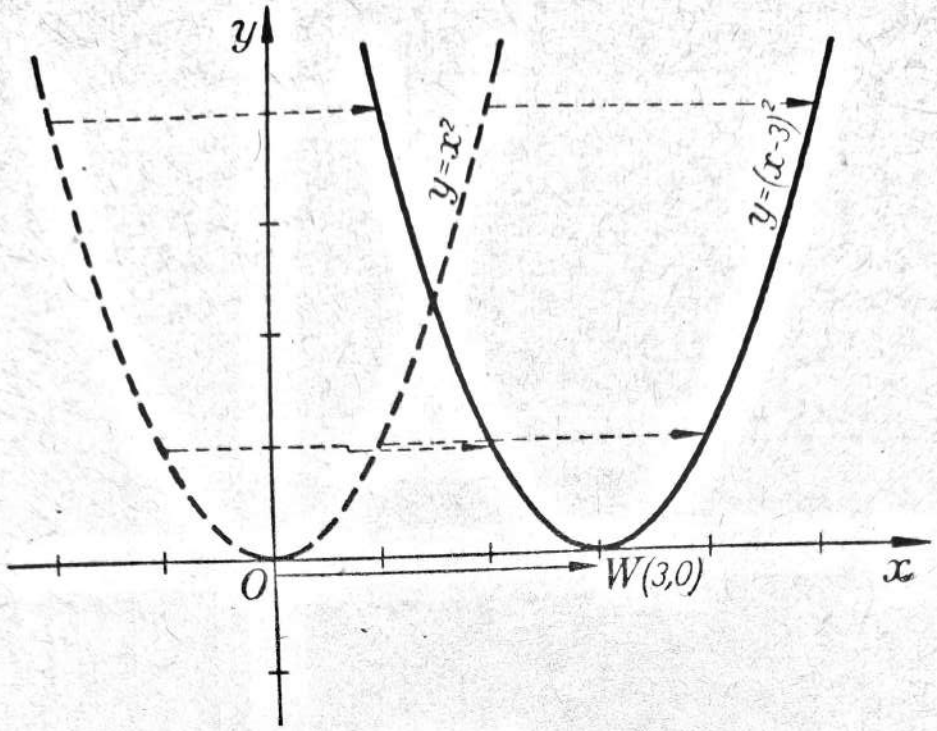
Szkicujemy wykresy funkcji $y = (x-3)^2$ i $y = (x+3)^2$ (rys. 134 i 135).

Z tabelek zmienności oraz wykresów możemy zauważyć, że:

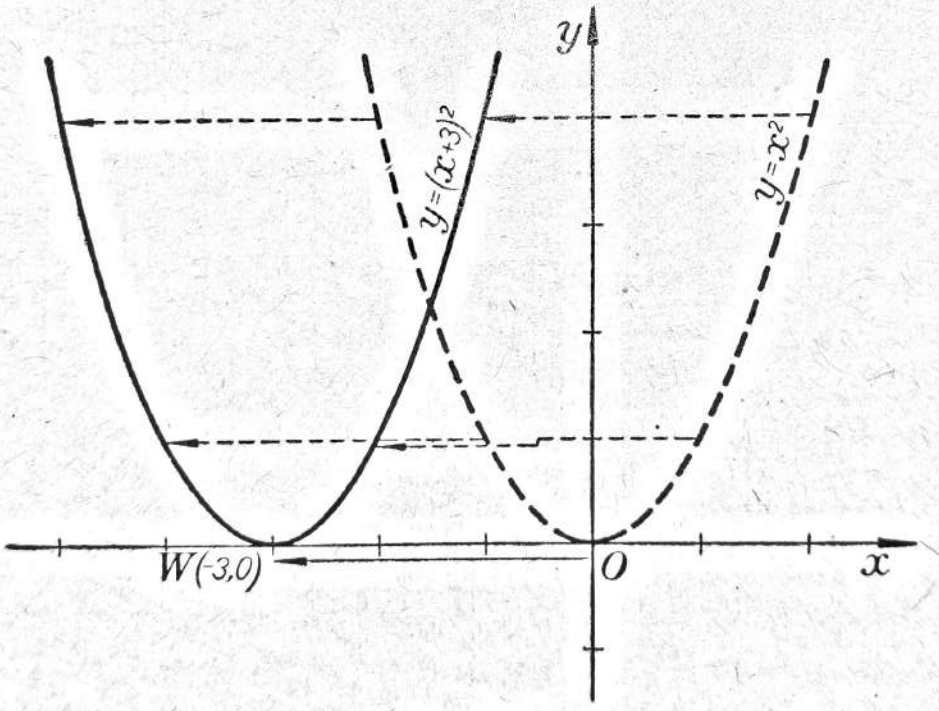
Funkcja $y = (x-3)^2$ przybiera te same wartości co funkcja $y = x^2$, lecz dla wartości zmiennej x zwiększonych o 3.

Stąd wniosek: aby otrzymać wykres funkcji $y = (x-3)^2$, przesuwamy parabolę $y = x^2$ równolegle do osi OX o 3 jednostki w kierunku dodatnim (na prawo).

I podobnie: aby otrzymać wykres funkcji $y = (x+3)^2$, przesuwamy parabolę $y = x^2$ równolegle do osi OX o 3 jednostki w kierunku ujemnym (na lewo).



Rys. 134



Rys. 135

Wnioski nasze uogólniamy i mówimy:

1. Aby wykreślić funkcję $y = a(x-p)^2$, przesuwamy parabolę $y = ax^2$ równolegle do osi OX o p jednostek, przy tym:

a) jeżeli $p > 0$, to w kierunku dodatnim (na prawo),

b) jeżeli $p < 0$, to w kierunku ujemnym (na lewo).

2. Wierzchołek paraboli znajduje się na osi OX w punkcie, którego odcięta równa się p.

Punkt ten jest jedynym punktem wspólnym paraboli z osią OX. Mówimy, że parabola jest styczna do osi OX.

3. Osią symetrii paraboli $y = a(x-p)^2$ jest prosta równoległa do osi OY przechodząca przez punkt $(p, 0)$.

Pytania

1. Omówcie sposób postępowania przy wykreślaniu funkcji $y = ax^2+c$.
2. Odpowiedzcie na następujące pytania dotyczące paraboli $y = ax^2+c$:

a) co jest jej osią symetrii?
b) jakie są współrzędne wierzchołka?
c) kiedy parabola ma 2 punkty wspólne z osią OX, a kiedy parabola nie ma punktów wspólnych z osią OX?

3. Omówcie sposób postępowania przy wykreślaniu funkcji $y = a(x-p)^2$.
4. Odpowiedzcie na następujące pytania dotyczące paraboli $y = a(x-p)^2$:

a) co jest jej osią symetrii?
b) jakie są współrzędne wierzchołka?
c) czy parabola ta ma punkty wspólne z osią OX?

Zadania

1. Wykreślcie następujące funkcje:

a) $y = x^2+1$
b) $y = x^2-1$
c) $y = 2x^2-5$
*d) $y = 3x^2+4$
e) $y = -x^2+4$
f) $y = -x^2-5$
*g) $y = -2x^2+1$
*h) $y = -\frac{1}{2}x^2-3$

Napiszcie współrzędne punktów przecięcia paraboli z osią OX (jeśli one istnieją).

2. Wykreślcie następujące funkcje:

a) $y = (x-1)^2$

b) $y = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

c) $y = 2(x-2)^2$

d) $y = \frac{1}{2}(x+4)^2$

*e) $y = -\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$

f) $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2$

*g) $y = -2(x-3)^2$

h) $y = -5(x+1)^2$

3. Wykreślcie następujące funkcje:

a) $y = x^2-4x+4$

b) $y = -x^2-6x-9$

c) $y = 2x^2+4x+2$

*d) $y = -x^2-2x-1$

*e) $y = -4x^2+4x-1$

*f) $y = 5x^2-30x+45$

LEKCJE 80 i 81

Wykresy funkcji

$y = a(x-p)^2+q$ i $y = ax^2+bx+c$

W poprzednich lekcjach nauczyliśmy się wykreślać funkcje kwadratowe postaci:

$$y = ax^2+c \text{ oraz } y = a(x-p)^2$$

przez odpowiednie przesunięcie paraboli $y = ax^2$ równolegle do osi OX lub OY.

Weźmy funkcję $y = a(x-p)^2+q$.

Widzimy na podstawie poprzednich rozważań, że na to, by otrzymać wykres tej funkcji, trzeba:

1. przesunąć parabolę $y = ax^2$ równolegle do osi OX o p jednostek: w prawo jeśli $p > 0$, w lewo jeśli $p < 0$, tak jak robiliśmy to przy wykresie funkcji $y = a(x-p)^2$;

2. przesunąć otrzymaną parabolę $y = a(x-p)^2$ równolegle do osi OY o q jednostek: do góry, jeśli $q > 0$, w dół, jeśli $q < 0$, tak jak robiliśmy to przy wykresie funkcji $y = ax^2+c$.

Weźmy obecnie trójmian kwadratowy w postaci ogólnej

$$y = ax^2+bx+c$$

i napiszmy go w postaci kanonicznej (lekcja 75—76, str. 338)

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

albo

$$y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

Widzimy, że postać ta jest identyczna z postacią

$$y = a(x-p)^2+q$$

jeśli tylko założymy, że

$$p = -\frac{b}{2a} \quad \text{i} \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Zanotowany przez nas sposób wykreślania funkcji $y = a(x-p)^2+q$ stosować będziemy więc również do funkcji postaci $y = ax^2+bx+c$, po uprzednim sprowadzeniu jej do postaci kanonicznej.

Przykład 1. Wykreślić funkcję

(I) $$y = x^2-4x+3$$

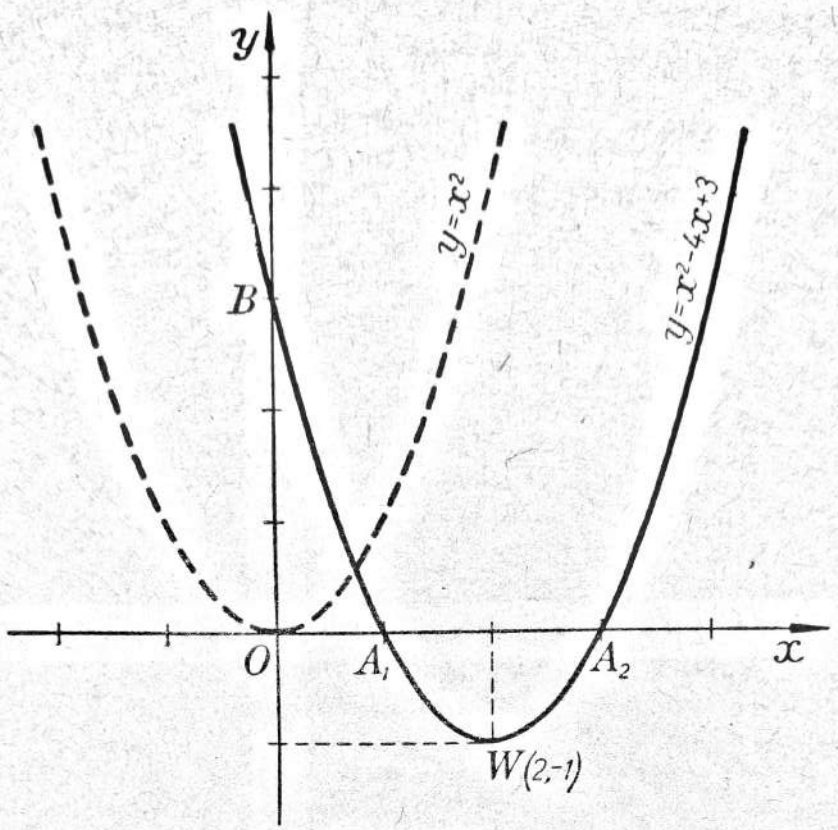
Trójmian sprowadzamy do postaci kanonicznej

(II) $$y = x^2-2\cdot x\cdot 2+4-4+3$$
$$y = (x-2)^2-1$$

Wykreślamy parabolę $y = x^2$ i przesuwamy ją równolegle:

1. do osi OX o 2 jednostki w kierunku dodatnim,
2. do osi OY o 1 jednostkę w kierunku ujemnym (rys. 136).

Wierzchołek W poszukiwanej paraboli znajdzie się w punkcie o współrzędnych: $W(2, -1)$, a więc $y_{\min} = -1$ dla $x = 2$.



Rys. 136

Punkt B przecięcia paraboli z osią OY ma współrzędne: $B(0, 3)$, co zgodne jest z wartością wyrazu wolnego ($c = 3$) trójmianu $y = x^2-4x+3$.

Punkty przecięcia paraboli z osią OX mają współrzędne:

$$A_1(1, 0) \quad \text{i} \quad A_2(3, 0)$$

Dla sprawdzenia znajdujemy miejsca zerowe trójmianu x^2-4x+3 przez rozwiązanie równania $x^2-4x+3 = 0$

$$x_1 = 1 \quad \text{i} \quad x_2 = 3$$

i stwierdzamy, że istotnie miejsca zerowe trójmianu są odciętymi punktów przecięcia paraboli z osią OX.

Przykład 2. Wykreślić trójmian kwadratowy

$$\text{(I)} \qquad y = 2x^2+6x+5\frac{1}{2}$$

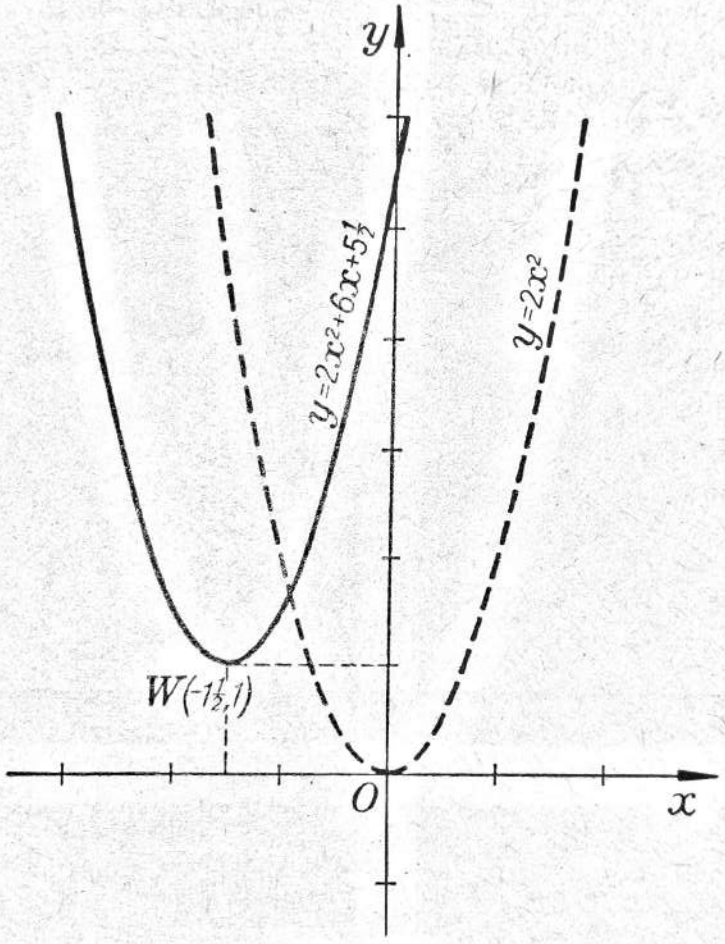
Sprowadzamy ten trójmian do postaci kanonicznej

$$y = 2\left(x^2+3x+\frac{11}{4}\right)$$

$$y = 2\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{11}{4}\right)$$

$$y = 2\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]$$

(II) $$y = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+1$$



Rys. 137

Wykreślamy parabolę $y = 2x^2$ i przesuwamy ją równolegle:

1. do osi OX o $1\frac{1}{2}$ jednostki w kierunku ujemnym.

2. do osi OY o 1 jednostkę w kierunku dodatnim (rys. 137).

Wierzchołek W poszukiwanej paraboli znajdzie się w punkcie o współrzędnych

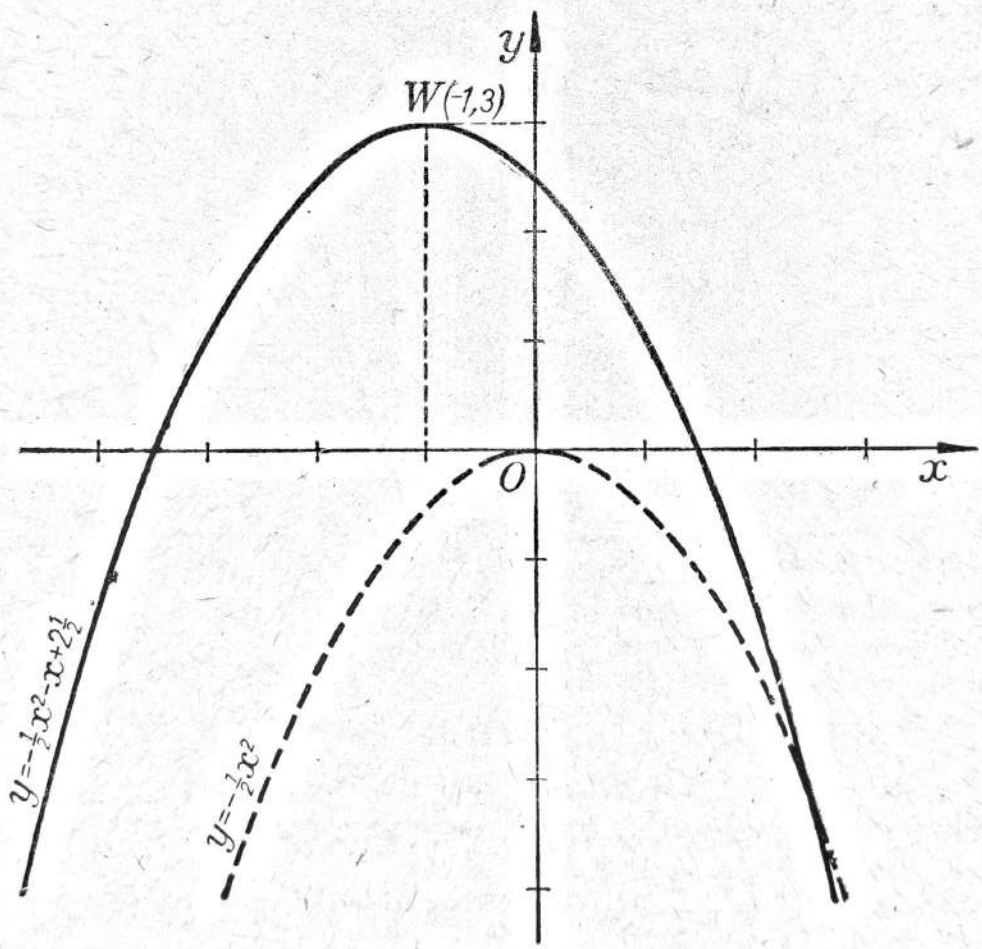
$$W\left(-1\frac{1}{2},\ 1\right),\quad \text{stąd}\quad y_{\min} = 1\quad \text{dla}\quad x = -1\frac{1}{2}$$

Parabola przecina oś OY w punkcie B o współrzędnych $\left(0, 5\frac{1}{2}\right)$, gdyż wyraz wolny $c = 5\frac{1}{2}$.

Parabola nie przecina osi OX. Sprawdzając stwierdzamy, że istotnie trójmian nie ma miejsc zerowych, gdyż wyróżnik jest ujemny ($\Delta = -8$).

Przykład 3. Wykreślić funkcję

(I) $$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2\frac{1}{2}$$



Rys. 138

Trójmian kwadratowy sprowadzamy do postaci kanonicznej:

$$y = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x - 5)$$

$$y = -\frac{1}{2}(x^2+2x+1-1-5)$$

$$y = -\frac{1}{2}[(x+1)^2-6]$$

(II) $$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2+3$$

Wykreślamy parabolę $y = -\frac{1}{2}x^2$ i przesuwamy ją równolegle:

1. do osi OX o 1 jednostkę w kierunku ujemnym,
2. do osi OY o 3 jednostki w kierunku dodatnim (rys. 138).

Wierzchołek W poszukiwanej paraboli znajdzie się więc w punkcie o współrzędnych $W(-1, 3)$; $y_{max} = 3$ dla $x = -1$.

Punkt B przecięcia paraboli z osią OY ma współrzędne $\left(0, 2\frac{1}{2}\right)$, gdyż wyraz wolny $c = 2\frac{1}{2}$.

Punkty przecięcia paraboli z osią OX mają współrzędne $A_1(-3{,}4;\ 0)$ i $A_2(1{,}4;\ 0)$.

Dla sprawdzenia znajdujemy miejsca zerowe trójmianu, rozwiązując równanie

$$-\frac{1}{2}x^2-x+2\frac{1}{2} = 0 \quad \text{albo} \quad x^2+2x-5 = 0$$

Otrzymujemy

$$x_1 = -1-\sqrt{6} \approx -3{,}4 \quad \text{i} \quad x_2 = -1+\sqrt{6} \approx 1{,}4$$

Na zakończenie działu o wykresach trójmianu kwadratowego zbierzemy i powtórzymy nasze wiadomości.

Trójmian kwadratowy ma postać ogólną: $y = ax^2+bx+c$

oraz postać kanoniczną: $y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

Wykresem trójmianu kwadratowego jest parabola.

Współczynnik a przy zmiennej x w potędze drugiej określa kierunek ramion paraboli:

a) jeżeli $a > 0$, to ramiona zwrócone są do góry,

b) jeżeli $a < 0$, to ramiona zwrócone są do dołu.

Wierzchołek paraboli ma współrzędne

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}$$

Jeżeli $a > 0$, to trójmian ma minimum $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ dla $x = -\frac{b}{2a}$, a jeżeli $a < 0$, to trójmian ma maximum $y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$ dla $x = -\frac{b}{2a}$.

Parabola przecina oś OY w punkcie o współrzędnych $(0, c)$, gdyż $y = c$ dla $x = 0$, inaczej:

Wyraz wolny c trójmianu oznacza na wykresie rzędną punktu przecięcia paraboli z osią OY.

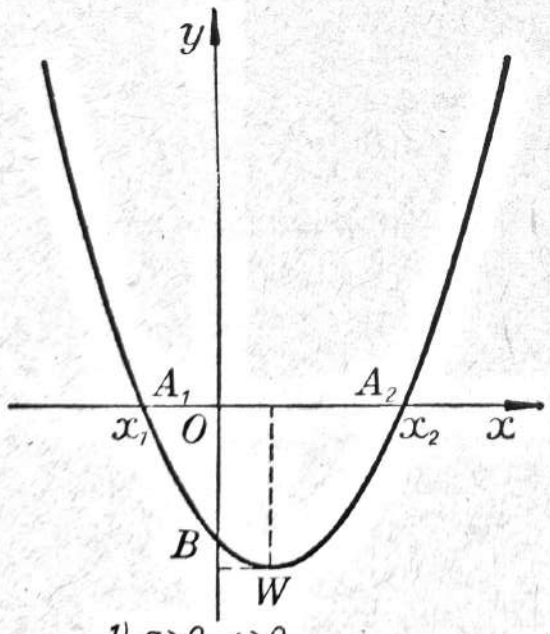
Odcięte punktów przecięcia paraboli z osią OX są miejscami zerowymi trójmianu. Wobec tego

a) jeżeli $\Delta > 0$, to trójmian ma dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

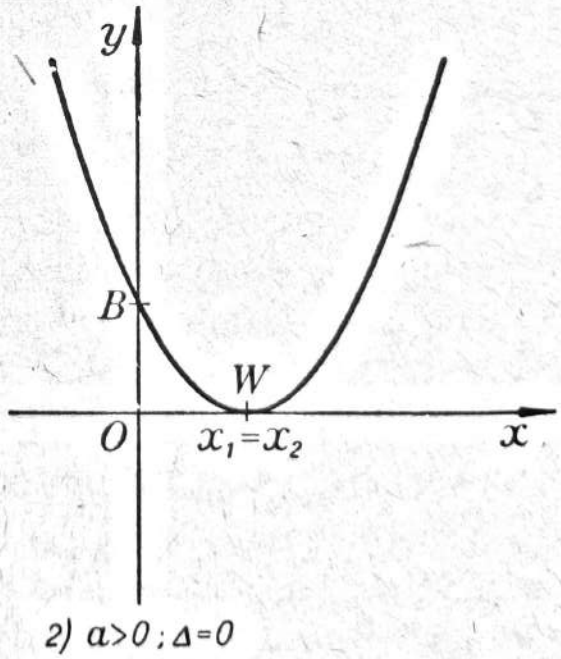
i parabola przecina oś OX w dwu punktach

$$(x_1, 0) \quad \text{i} \quad (x_2, 0)$$



1) $a>0$, $\Delta>0$

Rys. 139



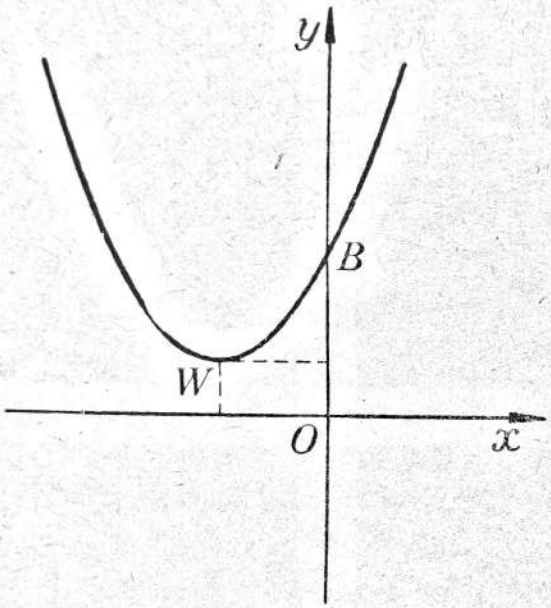
2) $a>0$; $\Delta=0$

Rys. 140

b) jeżeli $\Delta = 0$, to trójmian ma jedno podwójne miejsce zerowe $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ i parabola jest styczna do osi OX w punkcie $(x_1, 0)$.

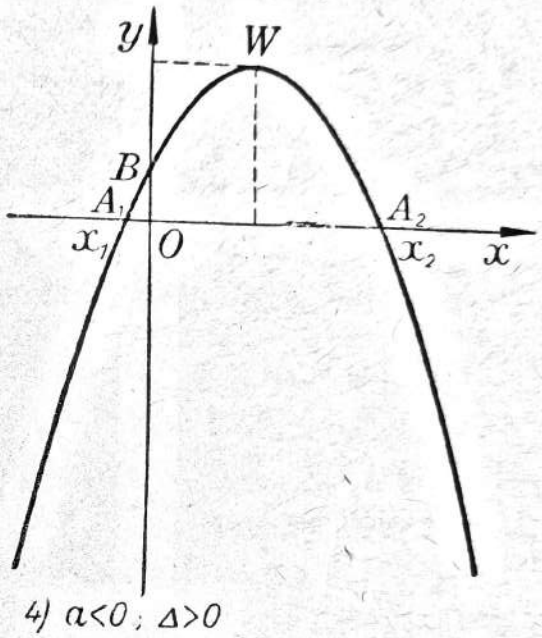
c) jeżeli $\Delta < 0$, to trójmian nie ma miejsc zerowych i parabola nie przecina osi OX.

Rysunki 139, 140, 141, 142, 143, 144 ilustrują różne położenia paraboli w zależności od znaku współczynnika a i wartości wyróżnika.



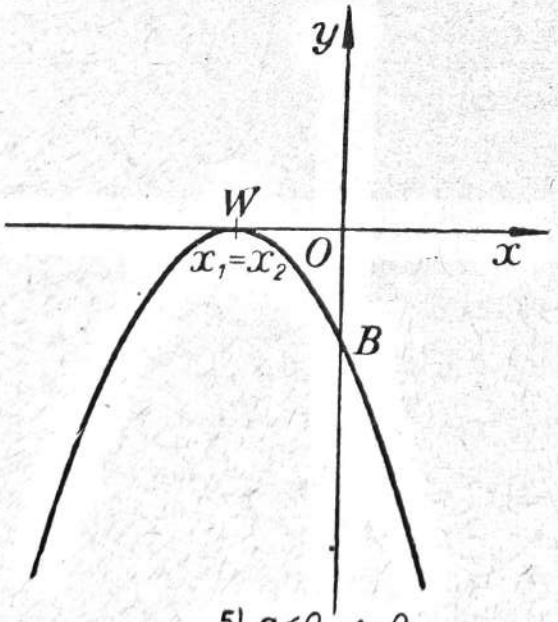
3) $a>0 ; \Delta<0$

Rys. 141



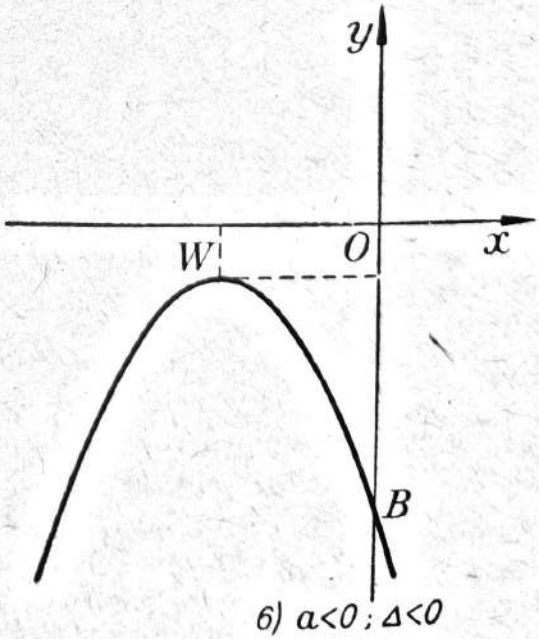
4) $a<0 ; \Delta>0$

Rys. 142



5) $a<0 \quad \Delta=0$

Rys. 143



6) $a<0 ; \Delta<0$

Rys. 144

Pytania

1. Omówcie sposób postępowania przy wykreślaniu trójmianu kwadratowego postaci

$$y = a(x-p)^2+q$$

2. Opiszcie, jak sporządzacie wykres trójmianu postaci

$$y = ax^2+bx+c$$

3. Jakie znaczenie dla paraboli ma współczynnik a?
4. Napiszcie współrzędne wierzchołka paraboli $y = ax^2+bx+c$.
5. Co oznacza na wykresie wyraz wolny c trójmianu $y = ax^2+bx+c$?
6. Od czego uzależnione są punkty przecięcia paraboli

$$y = ax^2+bx+c$$

z osią OX?

7. Co przedstawiają na wykresie trójmianu $y = ax^2+bx+c$ miejsca zerowe tego trójmianu?

Zadania

1. Wykonajcie wykresy funkcji:

a) $y = (x+2)^2-4$
b) $y = (x-1)^2+5$
c) $y = 2(x-3)^2-5$
d) $y = -2(x+1)^2+4$
e) $y = -(x-3)^2+4$
f) $y = -(x+1)^2-3$
g) $y = \frac{1}{2}(x-5)^2-1$
h) $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2+4$

2. Wykonajcie wykresy trójmianów:

a) $y = x^2-4x+6{,}5$
b) $y = -x^2-5x-5\frac{1}{4}$
c) $y = 2x^2-8x+11$
d) $y = \frac{1}{2}x^2-4x+6$
e) $y = x^2+2x-3$
f) $y = -x^2+6x-5$
g) $y = -2x^2+16x-30$
h) $y = x^2-3x-\frac{3}{4}$
i) $y = 2x^2+12x+11$
j) $y = -\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}$

LEKCJA 82

Układy dwu równań z dwiema niewiadomymi, z których jedno jest stopnia drugiego, a drugie stopnia pierwszego

W lekcjach 62—63 (str. 284) rozwiązywaliśmy algebraicznie i graficznie układy dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.

Obecnie zajmiemy się takimi układami równań z dwiema niewiadomymi, z których jedno jest stopnia drugiego, a drugie stopnia pierwszego.

Równaniami stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi są np. równania:

$$x^2+5y-x=7$$
$$x^2+y^2=16$$
$$y^2+2x+y=8$$
$$xy+y^2=5$$
$$xy=10$$

Jak widzimy z podanych przykładów, równanie z dwiema niewiadomymi jest stopnia drugiego, jeśli zawierą przynajmniej jeden z wyrazów postaci ax^2, by^2 i cxy, gdy $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $c \neq 0$.

Przykład. Rozwiązać algebraicznie i graficznie układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 3x-y=5 \end{cases}$$

Z równania stopnia pierwszego wyznaczamy np. y w zależności od x.

$$y=3x-5$$

i podstawiamy do równania stopnia drugiego. Otrzymujemy kolejno:

$$x^2+(3x-5)^2=5$$
$$x^2+9x^2-30x+25-5=0$$
$$10x^2-30x+20=0$$
$$x^2-3x+2=0$$

i stąd $x_1=1$ i $x_2=2$.

Podstawiając znalezione wartości x do równania $y = 3x-5$, obliczamy wartości niewiadomej y

$$y_1 = -2 \quad \text{i} \quad y_2 = 1$$

Otrzymaliśmy więc dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -2 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Aby przekonać się, czy pary te są rozwiązaniem danego układu równań, wykonujemy sprawdzenie:

dla $x = 1$ i $y = -2$ mamy: $L_1 = 1+(-2)^2 = 1+4 = 5$
$P_1 = 5$, a więc $L_1 = P_1$
$L_2 = 3-(-2) = 3+2 = 5$
$P_2 = 5$, a więc $L_2 = P_2$

dla $x = 2$ i $y = 1$ mamy: $L_1 = 4+1 = 5$
$P_1 = 5$, a więc $L_1 = P_1$
$L_2 = 6-1 = 5$
$P_2 = 5$, a więc $L_2 = P_2$

Przystępując do graficznego rozwiązania danego układu równań, przypominamy, że:

1. wykresem równania o dwu zmiennych jest miejsce geometryczne punktów, których współrzędne spełniają to równanie;

2. jeśli obrazy graficzne dwu równań mają wspólne punkty, to ich współrzędne spełniają oba równania, są zatem rozwiązaniem układu danych równań.

Równanie pierwsze $x^2+y^2 = 5$ wyznacza dwie funkcje:

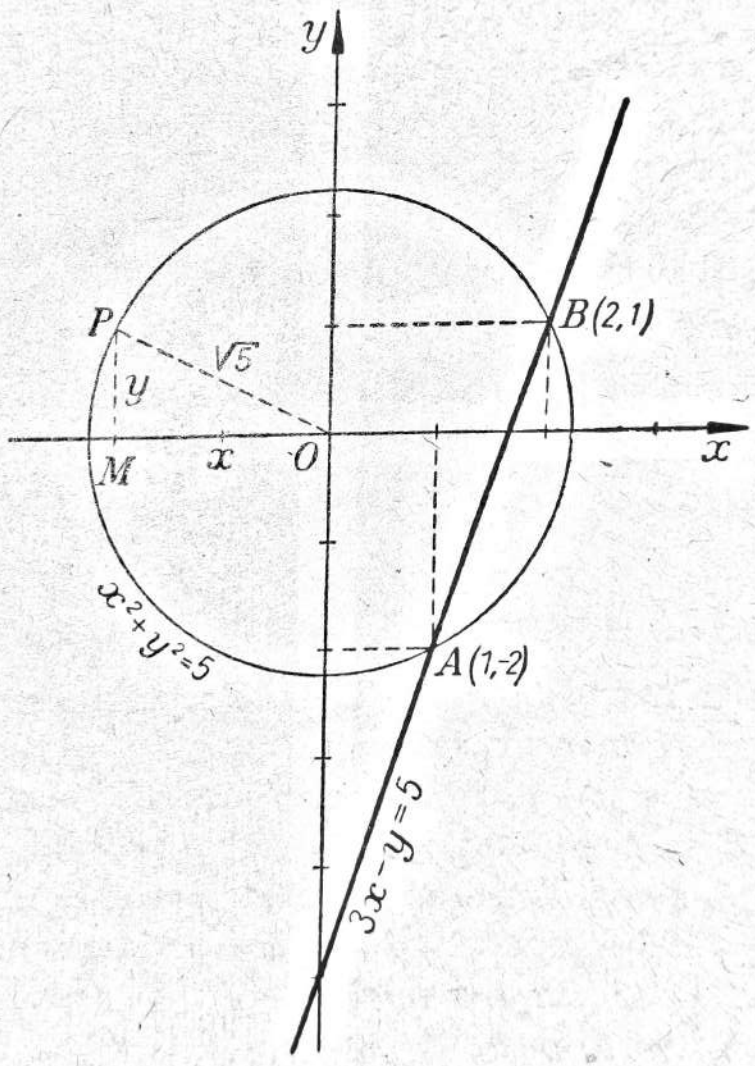
$$y = \sqrt{5-x^2}$$
$$y = -\sqrt{5-x^2}$$

określone dla wartości x spełniających warunek $-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}$. Układamy tabelki zmienności tych funkcji:

x	$-\sqrt{5}\approx-2,2$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	$\sqrt{5}\approx 2,2$
$y = \sqrt{5-x^2}$	0	1	1,7	2	2,1	2,2	2,1	2	1,7	0
$y = -\sqrt{5-x^2}$	0	-1	$-1,7$	-2	$-2,1$	$-2,2$	$-2,1$	-2	$-1,7$	0

Wyznaczając w układzie osi współrzędnych punkty odpowiadające parom liczb wziętych z tej tabelki i łącząc te punkty linią ciągłą, spostrzegamy, że wykresem funkcji $y = \sqrt{5-x^2}$ jest półokrąg o środku (0,0) i promieniu $r = \sqrt{5}$ położony nad osią OX, a wykresem funkcji $y = -\sqrt{5-x^2}$ taki sam półokrąg, lecz położony poniżej osi OX.

Możemy więc powiedzieć, iż równanie $x^2+y^2 = 5$ przedstawia na wykresie okrąg koła, którego promień $r = \sqrt{5}$, a środek leży w początku układu (rys. 145).



Rys. 145

Do tego samego rezultatu dojdziemy na drodze innego rozumowania. Równanie $x^2+y^2 = 5$ albo $x^2+y^2 = (\sqrt{5})^2$ postacią swą przypomina nam twierdzenie Pitagorasa.

x i y są przyprostokątnymi, a $\sqrt{5}$ przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego.

Każda para wartości x i y, spełniających równanie $x^2+y^2=5$, stanowi współrzędne punktu, którego odległość od początku układu wynosi $\sqrt{5}$.

Wykres więc równania $x^2=y^2=5$, jako miejsce geometryczne punktów oddalonych od początku układu o $\sqrt{5}$, jest okręgiem koła o środku (0, 0) i promieniu $r=\sqrt{5}$.

Drugie równanie układu jest funkcją liniową

$$y=3x-5,$$

której wykresem jest linia prosta przecinająca oś OY w punkcie (0, -5). Dla wykreślenia tej prostej znajdujemy drugi jej punkt przyjmując dowolną wartość x, np. dla $x=2$ mamy $y=1$.

Ilustracją graficzną układu równań jest więc okrąg koła i prosta przecinająca ten okrąg w dwu punktach.

Odczytujemy współrzędne punktów przecięcia

$$x=2 \quad \text{i} \quad y=1 \quad \text{oraz} \quad x=1 \quad \text{i} \quad y=-2$$

Pary liczb

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=-2 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x^2=2 \\ y_2=1 \end{cases}$$

są rozwiązaniem naszego układu. Te same wyniki otrzymaliśmy, rozwiązując układ równań algebraicznie.

Rozpatrywany układ równań rozwiązaliśmy metodą podstawiania. Metodę tę możemy stosować zawsze, gdy jedno z dwu równań układu jest stopnia pierwszego. Wyznaczamy wtedy z tego równania jedną z niewiadomych w zależności od drugiej i wstawiamy do równania drugiego. Dochodzimy w rezultacie do tzw. równania wynikowego z jedną niewiadomą.

Pytania

1. Co nazywamy rozwiązaniem układu dwu równań z dwiema niewiadomymi?
2. Co znaczy rozwiązać algebraicznie układ równań?

3. Opiszcie sposób postępowania przy rozwiązywaniu metodą podstawiania układu dwu równań z dwiema niewiadomymi, z których jedno jest stopnia pierwszego.

4. Co znaczy rozwiązać graficznie układ dwu równań z dwiema niewiadomymi?

5. Co przedstawiają na wykresie pary liczb będące rozwiązaniem układu dwu równań?

6. Co jest wykresem równania $x^2+y^2=25$ i równania $x^2+y^2=10$?

Zadania

1. Rozwiążcie algebraicznie i graficznie układy równań:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x-y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2-5x-y=-6 \\ x-y=-1 \end{cases}$

*b) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ 3x+y=10 \end{cases}$ *d) $\begin{cases} 2x^2-5x-y=-2 \\ 3x-y=4 \end{cases}$

2. Rozwiążcie algebraicznie układy równań:

a) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=6 \\ x-y=5 \end{cases}$ *c) $\begin{cases} x^2-y^2+2y=6 \\ 5x+6y=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2-3xy-4y=14 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2-2x+3y=3 \\ x-y=2 \end{cases}$

Odpowiedzi

1. a) $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=4 \\ y_2=-2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=5 \\ y_2=6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=3 \\ y_2=5 \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=27 \\ y_2=22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1=-3 \\ y_1=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\frac{63}{11} \\ y_2=-\frac{47}{11} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\frac{5}{2} \\ y_2=\frac{1}{2} \end{cases}$

LEKCJE 83 i 84

Układy dwu równań z dwiema niewiadomymi c. d.

Przykład 1. Rozwiązać algebraicznie i graficznie układ równań

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$$

Układ ten moglibyśmy rozwiązać metodą podstawiania, omówimy jednak sposób prostszy. Zauważmy, iż poszukujemy takich dwu liczb, których suma i iloczyn są dane. Liczby te zgodne z wzorami Viète'a spełniają równanie

$$z^2-5z+4=0,$$

po rozwiązaniu którego otrzymujemy

$$z_1=1 \qquad z_2=4$$

Mamy więc

$$x_1=1 \quad \text{i} \quad y_1=4$$

albo odwrotnie

$$x_2=4 \quad \text{i} \quad y_2=1$$

Sprawdzając możemy się przekonać, że pary liczb

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=1 \end{cases}$$

spełniają dany układ równań.

Wykonujemy ilustrację graficzną układu równań

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$$

Równania tego układu wyznaczają dwie funkcje

$$y=-x+5$$

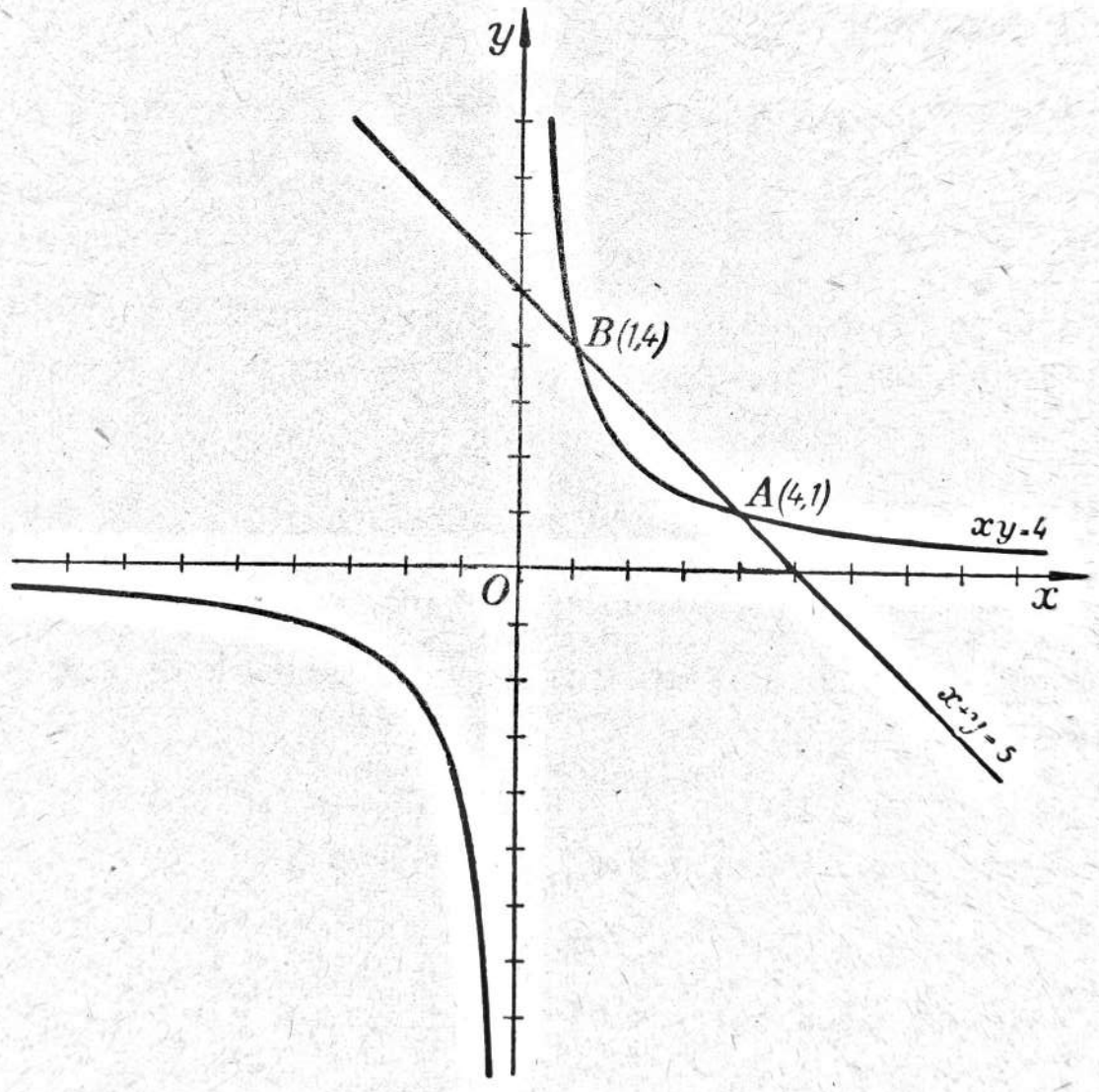
$$y=\frac{4}{x}$$

Pierwsza funkcja przedstawia na wykresie linię prostą przechodzącą przez punkt (0, 5) na osi OY i przez punkt (5, 0) na osi OX.

Druga funkcja $y = \frac{4}{x}$ określa zależność odwrotnie proporcjonalną między dwiema zmiennymi x i y*).

Wykonamy wykres tej funkcji. Układamy tabelę wartości funkcji, zwracając uwagę na jej zakres zmienności. Jest ona określona dla dowolnych wartości zmiennej x z wyjątkiem $x = 0$.

x	$\ldots$	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\ldots$	0	$\ldots$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\ldots$
y	$\ldots$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-8	$\ldots$	nie ma wartości	$\ldots$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\ldots$



Rys. 146

*) Widać to wyraźnie z tabelki. Gdy np. $x = 1$, to $y = 4$, a gdy $x = 4$, to $y = 1$. Gdy zmienna x wzrośnie pewną ilość razy, to zmienna y zmaleje taką samą ilość razy.

Wykresem funkcji $y = \frac{4}{x}$ jest krzywa zwana **hiperbolą**. Składa się ona z dwu gałęzi położonych w ćwiartkach I i III; gałęzie te nie mają punktów wspólnych z osiami OX i OY (rys. 146).

Ilustrację graficzną naszego układu równań stanowi więc hiperbola i prosta przecinająca tę hiperbolę w dwu punktach. Rozwiązaniem układu są współrzędne punktów przecięcia: (4, 1) i (1, 4). Pary liczb

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

spełniają dany układ. Te same wyniki otrzymaliśmy rozwiązując układ algebraicznie.

Przykład 2. Rozwiązać algebraicznie i graficznie układ równań

$$\begin{cases} x^2 - 6x - y = -5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Wyznaczając z równania stopnia pierwszego y i podstawiając do równania stopnia drugiego, otrzymujemy kolejno:

$$y = -2x + 1$$

$$x^2 - 6x + 2x - 1 + 5 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Doszliśmy do równania kwadratowego, którego lewa strona jest kwadratem dwumianu

$$(x-2)^2 = 0$$

Stąd otrzymujemy jeden podwójny pierwiastek

$$x = 2$$

Podstawiając znalezioną wartość x do równania $y = -2x + 1$, obliczamy wartość y

$$y = -3$$

Otrzymujemy więc

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Można sprawdzić, iż para ta jest rozwiązaniem naszego układu równań.

Rozwiążmy graficznie układ równań

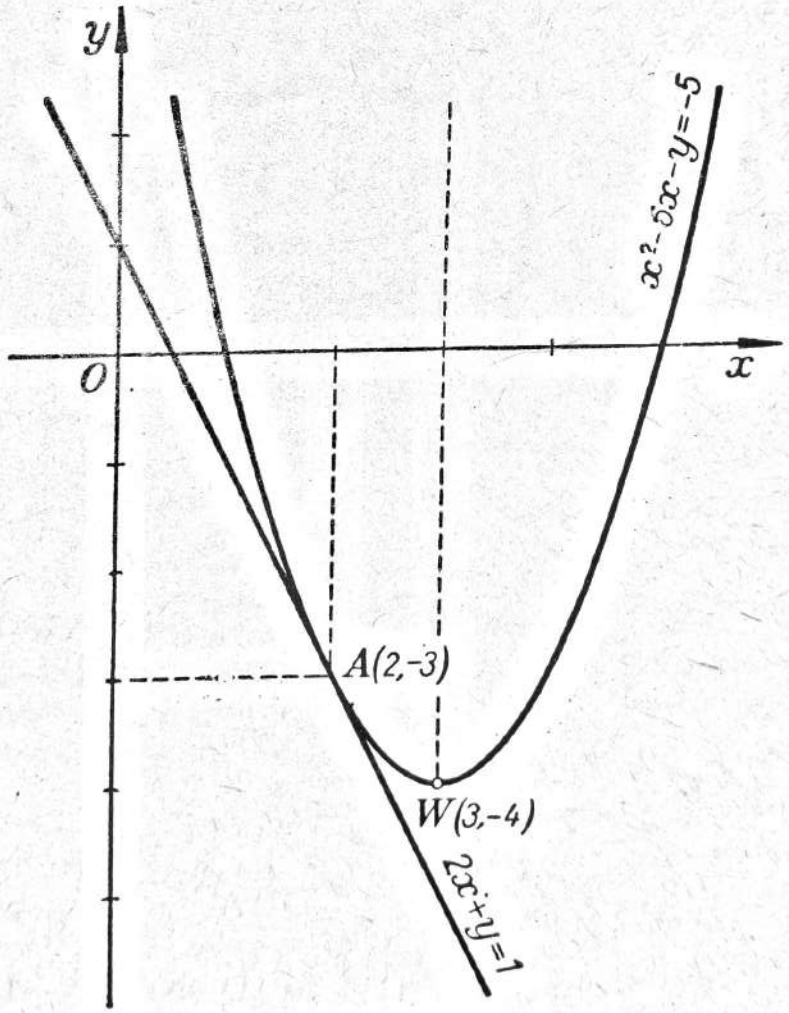
$$\begin{cases} x^2-6x-y=-5 \\ 2x+y=1 \end{cases}$$

Pierwsze równanie wyznacza funkcję

$$y = x^2-6x+5$$

o której wiemy, że na wykresie przedstawia parabolę. Aby ją wykreślić, sprowadzamy trójmian do postaci kanonicznej

$$y = (x-3)^2-4$$



Rys. 147

i następnie parabolę $y = x^2$ przesuwamy równolegle do osi OX o 3 jednostki w kierunku dodatnim i równolegle do osi OY o 4 jednostki w kierunku ujemnym (rys. 147).

Drugie równanie układu wyznacza funkcję liniową

$$y = -2x+1$$

której wykresem jest prosta przecinająca oś OY w punkcie (0, 1) i przechodząca przez punkt o współrzędnych np.

$$x = 1, \quad y = -1$$

Jako ilustrację graficzną układu równań otrzymaliśmy parabolę i prostą styczną do tej paraboli.

Współrzędne punktu styczności $x = 2$ i $y = -3$ są rozwiązaniem danego układu równań.

Przykład 3. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 4x^2-y^2 = 8 \\ 2x-y = 2 \end{cases}$$

Wyznaczamy z drugiego równania y i podstawiamy do równania pierwszego; otrzymujemy kolejno:

$$\begin{gathered} y = 2x-2 \\ 4x^2-(2x-2)^2 = 8 \\ 4x^2-4x^2+8x-4-8 = 0 \\ 8x-12 = 0 \\ 2x-3 = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{gathered}$$

Podstawiając tę wartość x do równania $y = 2x-2$, obliczamy wartość y

$$y = 1$$

Otrzymaliśmy więc

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Sprawdzając stwierdzamy, że para ta jest rozwiązaniem naszego układu równań.

Zauważmy, iż rozwiązując ten układ doszliśmy do równania wynikowego $2x-3 = 0$, tj. do równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą, dlatego też otrzymaliśmy tylko jedną parę wartości x i y.

Przypatrując się naszemu układowi spostrzegamy, iż lewa strona pierwszego równania rozkłada się na iloczyn dwu czynników

$$(2x-y)\,(2x+y) = 8$$

Ponieważ pierwszy czynnik, zgodnie z równaniem drugim, równa się 2, więc po uproszczeniu równanie przybierze postać

$$2x+y = 4$$

Pierwotny układ można więc zamienić na układ dwu równań stopnia pierwszego

$$\begin{cases} 2x+y = 4 \\ 2x-y = 2 \end{cases}$$

Ma on jedno rozwiązanie: $x = \frac{3}{2}$ i $y = 1$.

W poprzedniej i tej lekcji rozpatrywaliśmy układy, które miały dwa lub jedno rozwiązanie.

Układy równań mające skończoną ilość rozwiązań nazywamy **układami oznaczonymi.**

Pytania

1. Jakie znacie sposoby rozwiązania układu równań postaci:

$$\begin{cases} x+y = m \\ xy = n \end{cases}$$

Wyjaśnijcie ten sposób, w którym wykorzystujecie wzory Viète'a.

2. Co jest wykresem funkcji mającej postać $y = \frac{c}{x}$, gdzie c jest liczbą stałą dodatnią?

Dla jakich wartości zmiennej x jest określona ta funkcja?

3. Co przedstawia na wykresie para liczb będąca podwójnym rozwiązaniem układu dwu równań, z których jedno jest stopnia pierwszego?

Zadania

1. Rozwiążcie algebraicznie i graficznie układy równań:

a) $\begin{cases} xy = 2 \\ x+y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ y-2x = 5 \end{cases}$

*b) $\begin{cases} xy = 4 \\ x+y = -4 \end{cases}$ *d) $\begin{cases} x^2+6x-y = -7 \\ y-2x = 3 \end{cases}$

2. Rozwiążcie układy równań:

a) $\begin{cases} x^2-y^2 = 80 \\ x-y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2-2xy = 15 \\ x-2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x^2-9y^2 = 27 \\ 2x+3y = 3 \end{cases}$ *d) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2+2x = 19 \\ x-y = 3 \end{cases}$

Odpowiedzi

1. a) $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} x = 9 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

LEKCJE 85 i 86

Układy dwu równań z dwiema niewiadomymi

Przykład 1. Rozwiązać algebraicznie i graficznie układ równań

$$\begin{cases} x^2-4x+y = -5 \\ 3x-4y = 6 \end{cases}$$

Przypuśćmy, że istnieją wartości x i y spełniające ten układ. Z równania stopnia pierwszego mamy

$$y = \frac{3x-6}{4}$$

Po podstawieniu do równania stopnia drugiego otrzymujemy

$$x^2-4x+\frac{3x-6}{4} = -5$$

a po przekształceniu i uporządkowaniu mamy

$$4x^2-13x+14=0$$
$$\Delta = 169-224 = -55 < 0$$

Ponieważ wyróżnik jest ujemny, równanie kwadratowe nie ma pierwiastków i układ dany nie ma rozwiązań.

Ilustracja graficzna

Równania danego układu wyznaczają dwie funkcje:

$$y = -x^2+4x-5$$

$$y = \frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$$

Wykresem pierwszej funkcji jest parabola. Aby ją wykreślić, sprowadzamy trójmian kwadratowy do postaci kanonicznej

$$y = -(x-2)^2-1$$

a następnie parabolę $y = -x^2$ przesuwamy równolegle do osi OY o 1 jednostkę w kierunku ujemnym i równolegle do osi OX o 2 jednostki w kierunku dodatnim.

Wykresem drugiej funkcji jest linia prosta przechodząca przez punkty $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ i $(2, 0)$.

Ilustrację graficzną danego układu stanowi parabola i prosta nie przecinająca tej paraboli (rys. 148). Ponieważ obrazy graficzne równań nie mają punktu wspólnego, układ nie ma rozwiązań.

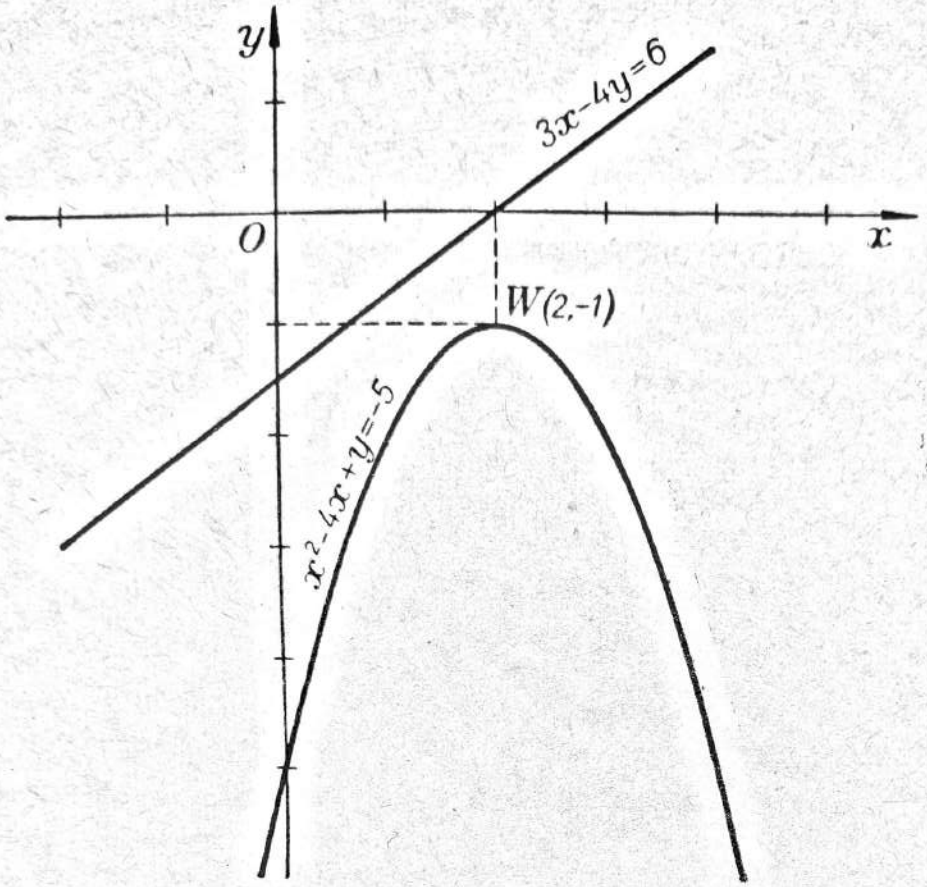
Otrzymaliśmy więc potwierdzenie wyniku uzyskanego na drodze algebraicznej.

Przykład 2. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 4x^2-y^2 = 16 \\ 2x+y = 0 \end{cases}$$

Przypuśćmy, iż istnieją wartości x i y spełniające ten układ. Z drugiego równania mamy

$$y = -2x$$



Rys. 148

Po podstawieniu do równania pierwszego otrzymujemy

$$\begin{aligned} 4x^2-(-2x)^2 &= 16 \\ 4x^2-4x^2 &= 16 \\ 0 &= 16 \end{aligned}$$

Przypuszczenie, że istnieją wartości x i y spełniające układ, doprowadziło nas do sprzeczności. Układ nie ma więc rozwiązania. Układ równań nie mający rozwiązania nazywa się układem sprzecznym.

Przykład 3. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 16x^2-y^2+6y = 9 \\ 4x+y = 3 \end{cases}$$

Przypuśćmy, iż istnieją wartości x i y spełniające ten układ. Z drugiego równania mamy

$$y = -4x+3$$

Po podstawieniu do równania pierwszego otrzymamy

$$16x^2-(-4x+3)^2+6(-4x+3)=9$$
$$16x^2-16x^2+24x-9-24x+18=9$$
$$9=9$$

Doszliśmy do tożsamości. Nie otrzymaliśmy więc ściśle określonej wartości x, która by była pierwiastkiem równania. Możemy jednak sprawdzić, iż każda para wartości x i y spełniająca równanie $y=-4x+3$ będzie również spełniała równanie drugie układu.

Weźmy np. $x=1$, wtedy $y=-4+3=-1$. Obliczmy dla tych wartości x i y wartość lewej strony pierwszego równania:

$$L_1=16-(-1)^2+6(-1)=16-1-6=9$$
$$P_1=9, \quad \text{a więc} \quad L_1=P_1$$

Para liczb $x=1$ i $y=-1$ spełnia oba równania układu. Ponieważ istnieje nieskończenie wiele par wartości x i y spełniających równanie $y=-4x+3$ i wszystkie te pary spełniają równanie $16x^2-y^2++6y=9$, układ więc ma nieskończenie wiele rozwiązań. Układ równań mający nieskończenie wiele rozwiązań nazywamy **układem nieoznaczonym.**

Zestawiając wyniki z przykładów przerobionych w lekcjach 82—86 możemy powiedzieć, iż układ dwu równań z dwiema niewiadomymi, z których jedno jest stopnia pierwszego, a drugie drugiego, może mieć:

1) dwa lub jedno rozwiązanie i wtedy nazywa się **oznaczonym,**

2) nieskończenie wiele rozwiązań i wtedy nazywa się **nieoznaczonym,**

3) może nie mieć rozwiązania, nazywa się wtedy **sprzecznym.**

Pytanie

Kiedy układ dwu równań z dwiema niewiadomymi jest oznaczony, kiedy nieoznaczony, a kiedy sprzeczny?

Zadania

1. Wykażcie, że następujące układy nie mają rozwiązań:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=3 \end{cases}$ \quad *b) $\begin{cases} x^2+y^2-6y=0 \\ 2x-3y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy-3x+2y=7 \\ x+y=0 \end{cases}$ *d) $\begin{cases} x^2-6x-y=-11 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$

Dla układu a) i d) wykonajcie ilustrację graficzną.

2. Które z poniższych układów są sprzeczne, a które nieoznaczone:

a) $\begin{cases} x^2-y^2+4y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+2xy+6y=7 \\ x+2y=3 \end{cases}$

*b) $\begin{cases} y^2+xy+x=2 \\ x+y=1 \end{cases}$ *d) $\begin{cases} x^2-xy+x+2y=6 \\ x-y=-3 \end{cases}$

Odpowiedzi

2. a) nieoznaczony, b) sprzeczny, c) sprzeczny, d) nieoznaczony.

LEKCJA 87

Zastosowanie układu równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi do rozwiązywania zadań z treścią

Układy równań z dwiema niewiadomymi stosujemy do rozwiązywania takich zadań, których treść pozwala na obranie dwu wielkości za niewiadome. Należy przy tym podkreślić, iż wiele zadań z lekcji 34—38, które prowadziły do rozwiązania równania kwadratowego z jedną niewiadomą, możemy rozwiązać wprowadzając dwie niewiadome i układając dwa równania na podstawie dwu warunków podanych w treści zadania.

Sposób postępowania pokażemy na przykładach.

Przykład 1. Dwóch robotników o różnych kwalifikacjach otrzymało niejednakowe wynagrodzenie za pracę. Pierwszy z nich, pracując o dwa dni dłużej niż drugi, otrzymał 630 zł, a drugi, którego zarobek dzienny był o 5 zł większy, otrzymał 600 zł. Ile zł dziennie zarabiał każdy robotnik?

Rozwiązanie

Pierwszy robotnik zarabiał dziennie	x zł
Drugi robotnik zarabiał dziennie	$(x+5)$ zł
Pierwszy robotnik pracował	$(y+2)$ dni
Drugi robotnik pracował	y dni
Pierwszy robotnik zarobił w ciągu $(y+2)$ dni	$x(y+2)$ zł
Drugi robotnik zarobił w ciągu y dni	$y(x+5)$ zł

Z warunków zadania wiemy, że pierwszy robotnik zarobił 630 zł, a drugi robotnik zarobił 600 zł, mamy więc układ dwu równań

$$\begin{cases} x(y+2) = 630 \\ y(x+5) = 600 \end{cases}$$

a po wykonaniu mnożenia

$$\begin{cases} xy+2x = 630 \\ xy+5y = 600 \end{cases}$$

Oba równania układu są stopnia drugiego ze względu na x i y. Zauważmy jednak, że jako wyraz stopnia drugiego występuje w nich tylko iloczyn xy. Wobec tego stosując metodę przeciwnych współczynników możemy iloczyn ten wyrugować. W tym celu pomnóżmy obie strony drugiego równania przez -1, a następnie dodajmy te równania stronami

$$\begin{cases} xy+2x = 630 \\ -xy-5y = -600 \\ \hline 2x-5y = 30 \end{cases}$$

Doszliśmy do równania stopnia pierwszego względem niewiadomych x i y. Dołączając do niego jedno z równań stopnia drugiego, otrzymujemy w zamian układu pierwotnego nowy układ

$$\begin{cases} xy+5y = 600 \\ 2x-5y = 30 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu takiej postaci jest nam znane i nie nastręcza żadnych trudności (dokończcie sami). Otrzymamy dwie pary wartości x i y:

$$\begin{cases} x_1 = -35 \\ y_1 = -20 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 45 \\ y_2 = 12 \end{cases}$$

Pierwsza para wartości nie odpowiada warunkom zadania, dla drugiej pary wykonamy sprawdzenie.

Sprawdzenie. Pierwszy robotnik zarabiał dziennie 45 zł i pracował $12+2 = 14$ dni, a drugi zarabiał dziennie $45+5 = 50$ zł i pracował 12 dni. Wynagrodzenie pierwszego robotnika wynosiło $14 \cdot 45$ zł $= 630$ zł, a drugiego $12 \cdot 50$ zł $= 600$ zł, co zgodne jest z warunkami zadania.

Odpowiedź. Pierwszy robotnik zarabiał dziennie 45 zł, a drugi 50 zł.

Przykład 2. Znaleźć dwie liczby, jeżeli wiadomo, że suma ich kwadratów wynosi 202, a różnica ich kwadratów wynosi 40.

Rozwiązanie

Pierwszą liczbę oznaczamy przez	x
drugą liczbę oznaczamy przez	y
Suma kwadratów tych liczb wynosi	x^2+y^2
różnica kwadratów tych liczb wynosi	x^2-y^2

Zgodnie z warunkami zadania mamy więc układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 202 \\ x^2-y^2 = 40 \end{cases}$$

Oba równania są stopnia drugiego. Dodając je stronami otrzymujemy

$$2x^2 = 242$$

a stąd

$$x^2 = 121$$

Pierwiastkami tego równania są

$$x_1 = -11 \quad \text{i} \quad x_2 = 11$$

Zamiast układu pierwotnego otrzymujemy dwa inne układy równań:

$$\text{I.} \begin{cases} x^2+y^2 = 202 \\ x = -11 \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} x^2+y^2 = 202 \\ x = 11 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ I. Podstawiając wartość $x = -11$ do równania pierwszego, mamy

$$121+y^2 = 202$$
$$y^2 = 81$$

i stąd

$$y_1 = -9 \quad \text{i} \quad y_2 = 9$$

Otrzymujemy więc dwie wartości x i y:

$$\begin{cases} x_1 = -11 \\ y_1 = -9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -11 \\ y_2 = 9 \end{cases}$$

Rozwiązując w podobny sposób układ II, otrzymujemy dwie inne pary wartości x i y:

$$\begin{cases} x_3 = 11 \\ y_3 = -9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 11 \\ y_4 = 9 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy cztery pary wartości x i y. Łatwo sprawdzić, że są one rozwiązaniami danego układu równań.

Zadania

1. Rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} xy - 7x = 2 \\ 2xy + 3y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 134 \\ 2x^2 + 3y^2 = 77 \end{cases}$

2. Iloraz sumy dwu liczb przez ich różnicę wynosi $\frac{5}{2}$. Suma kwadratów tych liczb wynosi 58. Jakie to liczby?

***3.** Jeżeli od iloczynu dwu liczb odejmiemy mniejszą liczbę, to otrzymamy 140, a jeżeli od tego iloczynu odejmiemy większą liczbę, to otrzymamy 135. Jakie to liczby?

4. Jeżeli do liczby dwucyfrowej dodamy iloczyn jej cyfr, to otrzymamy 86; jeżeli w liczbie tej przestawimy cyfry, to stosunek nowej liczby do szukanej wyniesie 3:8. Jaka to liczba?

***5.** Liczba dwucyfrowa jest 7 razy większa od sumy jej cyfr, a o 52 większa od iloczynu tych cyfr. Jaka to liczba?

Odpowiedzi

1. a) $x_1 = -1$, $y_1 = 5$; $x_2 = -\frac{3}{7}$, $y_2 = \frac{7}{3}$, b) $x_1 = 5$, $y_1 = 3$; $x_2 = -5$, $y_2 = 3$; $x_3 = 5$, $y_3 = -3$; $x_4 = -5$, $y_4 = -3$.
2. -7 i -3 lub 7 i 3. **3.** -14 i -9 lub 10 i 15. **4.** 72, **5.** 84.

LEKCJA 88

Rozwiązywanie zadań

Rozwiążcie samodzielnie następujące zadania.

1. Rozwiązać układ równań:

a) $\begin{cases} 3y^2-x+4y = 10 \\ y^2+x+3y = 1 \end{cases}$ *b) $\begin{cases} x^2-y^2 = 28 \\ 5x^2-8y^2 = 32 \end{cases}$

2. Suma kwadratów dwu liczb wynosi 221. Jeżeli jedną z tych liczb zwiększymy o 1, a drugą zmniejszymy o 3, to suma kwadratów otrzymanych liczb wyniesie 229. Jakie to liczby?

***3.** Kupiono materiału dwu gatunków, za lepszy zapłacono 300 zł, a za gorszy 156 zł. Materiału lepszego gatunku kupiono o 2 m więcej i płacono za 1 m o 8 zł więcej niż za 1 m gorszego gatunku. Ile metrów materiału każdego gatunku kupiono?

4. Z dwu miast A i B oddalonych o 200 km wyjeżdżają jednocześnie dwa samochody i po spotkaniu pierwszy dojeżdża do B w ciągu 1 godz. 20 min., a drugi do A w ciągu 3 godz. Z jaką prędkością jechały samochody?

***5.** Odległość między stacjami wynoszącą 16 km pociąg osobowy przebywa w czasie o 16 minut krótszym niż pociąg towarowy. Gdyby prędkość pociągu osobowego zwiększyć o 8 km/godz, a towarowego o 6 km/godz, to pociąg osobowy przebyłby tę drogę w czasie o 12 minut krótszym niż pociąg towarowy. Jaka jest prędkość pociągu osobowego, a jaka pociągu towarowego?

Odpowiedzi

1. a) $x_1 = -3$, $y_1 = 1$; $x_2 = \frac{27}{16}$, $y_2 = -\frac{11}{4}$, b) $x_1 = 8$, $y_1 = 6$; $x_2 = -8$, $y_2 = 6$; $x_3 = 8$, $y_3 = -6$; $x_4 = -8$, $y_4 = -6$. **2.** $-14{,}2$ i $-4{,}4$ lub 14 i 5. **3.** 5 m i 3 m lub 15 m i 13 m. **4.** 60 km/godz i 40 km/godz. **5.** 12 km/godz i 10 km/godz lub 40 km/godz i 24 km/godz.

LEKCJA 89

Rozwiązywanie zadań

Również i w tej lekcji będziemy ćwiczyć się w samodzielnym rozwiązywaniu zadań.

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2-3x = 32 \\ x^2+y^2+6y = 41 \end{cases}$$

2. Jeżeli licznik ułamka zmniejszymy o 1, a mianownik zwiększymy o 1, to otrzymany ułamek będzie mniejszy od pierwotnego o $\frac{3}{14}$; jeżeli zaś licznik ułamka powiększymy o 3, a mianownik zmniejszymy o 3, to otrzymamy 2. Jaki to ułamek?

3. Dwa samoloty wylatują jednocześnie z lotniska do miasta A odległego o 700 km. Jeden z nich leci z prędkością o 50 km/godz większą niż drugi i przylatuje do A o 20 minut wcześniej. Z jaką prędkością leciały samoloty?

*4. Z dwu miast A i B, oddalonych o 18 km, wychodzą jednocześnie dwaj podróżni i spotykają się po dwóch godzinach. Idąc dalej z tą samą prędkością pierwszy przybywa do B o 54 minuty później niż drugi do A. Z jaką prędkością szli podróżni?

**5. Dwu robotników wykonało pewną pracę w ciągu 42 godzin w ten sposób, że $\frac{1}{3}$ pracy wykonał jeden robotnik, a resztę drugi robotnik. Gdyby pracowali wspólnie, to pracę ukończyliby w ciągu 20 godzin. W ciągu ilu godzin każdy robotnik mógłby wykonać sam tę pracę?

**6. Przez dwa krany otwarte jednocześnie pusty zbiornik napełnia się w ciągu 6 godzin. Zbiornik napełniono w ciągu 12 godzin 30 min. w ten sposób, że przez pierwszy kran napełniono połowę, a przez drugi kran resztę. W ciągu ilu godzin przez każdy kran oddzielnie może napełnić się zbiornik?

**7. Na drodze długości 300 m przednie koło pojazdu wykonuje o 50 obrotów więcej niż tylne. Gdyby obwód każdego koła zwiększyć o 1 m, to na tej samej drodze przednie koło zrobiłoby o 20 obrotów więcej niż tylne. Jakie są obwody tych kół?

Odpowiedzi

1. $x_1 = 7$, $y_1 = -2$; $x_2 = -\frac{17}{5}$, $y_2 = \frac{16}{5}$. Wskazówka: Pierwsze równanie pomnożyć obustronnie przez -1 i następnie równania dodać stronami. **2.** $\frac{3}{6}$ lub $\frac{5}{7}$. **3.** 300 km/godz i 350 km/godz. **4.** 4 km/godz i 5 km/godz. Wskazówka: Pierwszy podróżny idzie z prędkością x km/godz, drugi z prędkością y km/godz. Do spotkania pierwszy przechodzi $2x$ km, a drugi $2y$ km, stąd mamy równanie $2x+2y = 18$. Pierwszy podróżny przechodzi drogę $2y$ km w czasie $\frac{2y}{x}$ godz., drugi podróżny drogę $2x$ km przechodzi w czasie $\frac{2x}{y}$ godz., stąd mamy drugie równanie $\frac{2y}{x} - \frac{2x}{y} = \frac{9}{10}\left(54 \text{ min.} = \frac{9}{10} \text{ godz.}\right)$. **5.** 70 godz. i 28 godz. lub 36 godz. i 45 godz. Wskazówka: Pierwszy robotnik wykona pracę sam w ciągu x godz., a drugi w ciągu y godz. Wobec tego $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y = 42$ i $\frac{20}{x} + \frac{20}{y} = 1$. **6.** 10 godz. i 15 godz. **7.** 1,5 m i 2 m.

LEKCJA 90

Zadania z treścią geometryczną prowadzące do równań lub układów równań stopnia drugiego

Pozostało jeszcze do opracowania siedem lekcji geometrii. W pierwszych czterech znajdziecie zadania liczbowe i konstrukcyjne, przy przerabianiu których powtórzycie szereg ważnych twierdzeń poznanych poprzednio. Już z tego chociażby względu musicie te zadania przepracować jak najstaranniej. Trzy ostatnie lekcje są poświęcone zagadnieniu mierzenia długości okręgu i jego łuku oraz pola koła i wycinka kołowego.

Dziś zajmiemy się rozwiązywaniem zadań z geometrii prowadzących do równań lub układów równań stopnia drugiego.

Przykład 1. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest o 7 cm dłuższa od drugiej przyprostokątnej i o 2 cm krótsza od przeciwprostokątnej. Obliczyć boki tego trójkąta.

Rozwiązanie. Niech x oznacza większą przyprostokątną, wówczas mniejszą przyprostokątną możemy oznaczyć przez $(x-7)$, a przeciwprostokątną przez $(x+2)$ (rys. 149). Stosując do trójkąta ABC twierdzenie Pitagorasa, otrzymujemy równość

$$AC^2+BC^2=AB^2$$

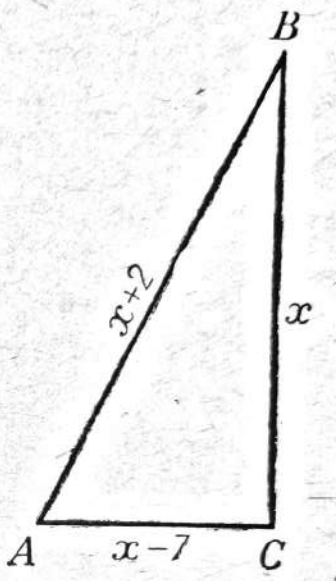
a z niej równanie

$$(x-7)^2+x^2=(x+2)^2$$

które sprowadza się (sprawdźcie) do równania kwadratowego

$$x^2-18x+45=0$$

o pierwiastkach $x_1=3$ i $x_2=15$. Przyjmujemy tylko $x=15$ cm, gdyż przy $x=3$ cm przyprostokątna AC wyraziłaby się liczbą ujemną.



Rys. 149

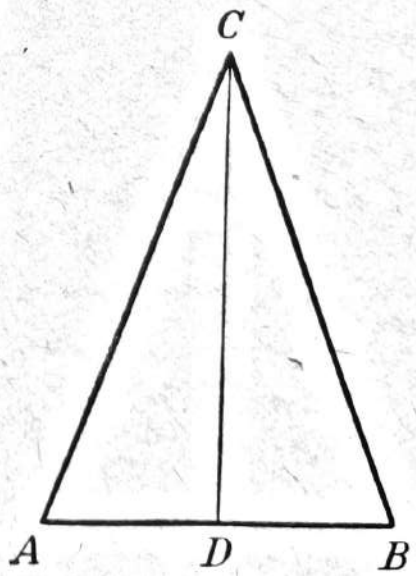
Sprawdzenie. Jeśli $BC=x=15$ cm, to $AC=(x-7)$ cm $=8$ cm, $AB=(x+2)$ cm $=17$ cm. Liczby 8, 15, 17 spełniają warunek $8^2+15^2=17^2$, przeto trójkąt o bokach 8 cm, 15 cm, 17 cm jest prostokątny.

Odpowiedź. Boki rozważanego trójkąta wynoszą 8 cm, 15 cm i 17 cm.

Przykład 2. W trójkącie równoramiennym wysokość wynosi 8 cm, a suma ramienia i podstawy 22 cm. Obliczyć boki tego trójkąta.

Rozwiązanie. Rysujemy trójkąt ABC, w którym $AC=BC$, $CD\perp AB$ (rys. 150). Zgodnie z warunkami zadania $CD=8$ cm, $AC+AB=22$ cm. Oznaczając $AC=x$, $AB=y$ mamy równanie

$$x+y=22$$



Rys. 150

Drugie równanie otrzymamy, stosując do trójkąta prostokątnego ADC twierdzenie Pitagorasa:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

czyli

$$x^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 64$$

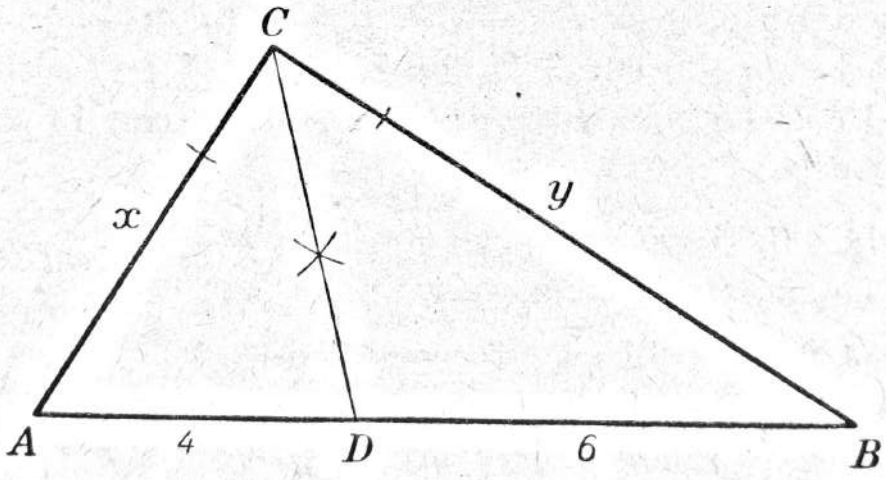
Zadanie sprowadza się więc do rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x+y = 22 \\ x^2 - \frac{y^2}{4} = 64 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań (rozwiążcie) i odrzucając rozwiązania ujemne, otrzymujemy $x = 10$, $y = 12$.

Odpowiedź. $AC = BC = 10$ cm, $AB = 12$ cm.

Przykład 3. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki 4 cm i 6 cm. Obliczyć przyprostokątne.



Rys. 151

Rozwiązanie. Rysujemy trójkąt prostokątny ABC i dwusieczną CD kąta prostego ACB. Zgodnie z warunkami zadania $AD = 4$ cm, $DB = 6$ cm, zatem $AB = 10$ cm. Oznaczmy: $AC = x$, $BC = y$ (rys. 151). Na mocy twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie z lekcji 26 (przypomnijcie sobie to twier-

dzenie, str. 134) możemy napisać proporcję

$$AD:DB = AC:BC$$

czyli proporcję

$$4:6 = x:y$$

z której wynika równanie

$$3x-2y = 0$$

Drugie równanie otrzymamy, stosując do trójkąta ABC twierdzenie Pitagorasa. Mamy

$$AC^2+BC^2 = AB^2$$

a stąd

$$x^2+y^2 = 100$$

Zadanie sprowadza się do rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} 3x-2y = 0 \\ x^2+y^2 = 100 \end{cases}$$

Sprawdźcie, że

$$AC = x = \frac{20}{\sqrt{13}} \text{ cm}, \quad BC = y = \frac{30}{\sqrt{13}} \text{ cm}.$$

Pytania

1. Wypowiedzcie twierdzenie Pitagorasa.
2. Wypowiedzcie twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie.
3. Z jakich własności trójkąta równoramiennego korzystaliśmy w przykładzie 2?

Zadania

1. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest o 9 cm większa od jednej przyprostokątnej i o 18 cm większa od drugiej przyprostokątnej. Obliczyć boki tego trójkąta.

2. Obwód prostokąta wynosi 34 cm, a pole 60 cm^2. Obliczyć boki.

3. W trójkącie prostokątnym mniejsza przyprostokątna równa się $2\sqrt{15}$ cm, a różnica rzutów obu przyprostokątnych na przeciwprostokątną wynosi 2 cm. Obliczyć wspomniane rzuty.

Wskazówka: Oprzeć się na twierdzeniu z lekcji 64 (str. 293).

4. W trójkącie równoramiennym ramię wynosi 15 cm, a podstawa jest o 15 cm większa od wysokości. Obliczyć podstawę i wysokość.

***5.** Jeżeli jeden z boków kwadratu zwiększymy dwukrotnie, a drugi zmniejszymy o 1 cm, to otrzymamy prostokąt, którego pole jest o 8 cm^2 większe od pola kwadratu. Obliczyć bok kwadratu.

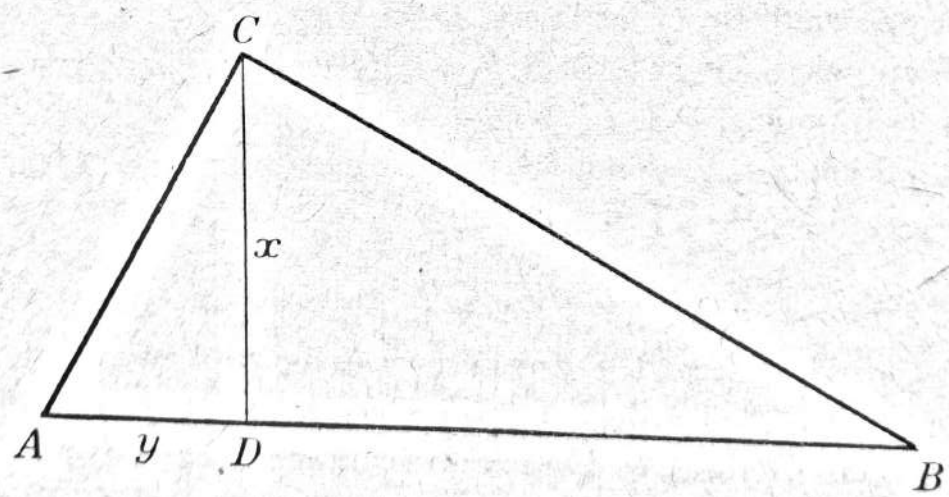
Odpowiedzi

1. 27 cm, 36 cm, 45 cm. **2.** 5 cm i 12 cm. **3.** 5 cm i 7 cm. **4.** 24 cm i 9 cm. **5.** 4 cm.

LEKCJA 91

Zadania z treścią geometryczną prowadzące do równań lub układów równań stopnia drugiego

Przykład 1. W trójkącie prostokątnym jeden z odcinków, na które wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną, jest o 2 cm krótszy od tej wysokości. Przeciwprostokątna ma długość 13 cm. Obliczyć wysokość i wspomniany odcinek przeciwprostokątnej.



Rys. 152

Rozwiązanie. W trójkącie ABC z wierzchołka C kąta prostego prowadzimy wysokość CD i oznaczamy: $CD = x$, $AD = y$ (rys. 152). Zgodnie z warunkami zadania między wysokością x i odcinkiem y

zachodzi zależność

$$x-y=2$$

Drugie równanie otrzymamy, stosując do trójkąta ABC twierdzenie o wysokości trójkąta prostokątnego z lekcji 66 (przypomnijcie sobie, str. 299). Na mocy tego twierdzenia mamy równość

$$CD^2 = AD \cdot DB$$

z której, po uwzględnieniu, że $DB = AB-AD = 13-y$, wynika równość

$$x^2 = y(13-y)$$

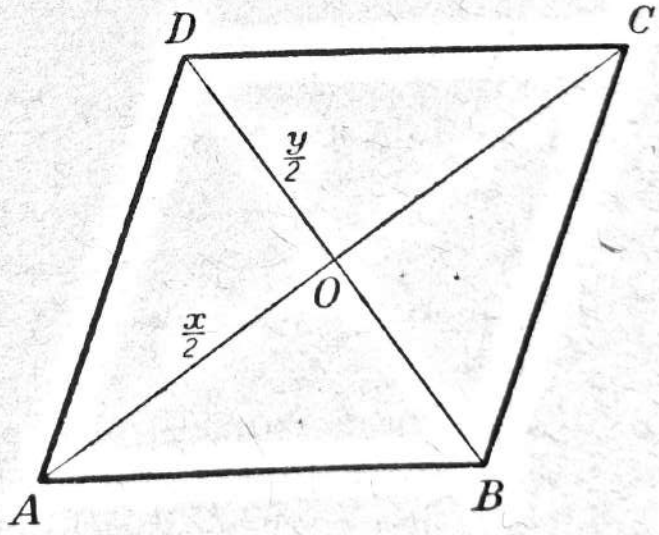
Rozwiążcie układ równań

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x^2-13y+y^2=0 \end{cases}$$

i sprawdźcie, że jego rozwiązaniami są pary liczb:

$$x = 2\frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2} \text{ oraz } x = 6,\ y = 4$$

Przykład 2. Bok rombu ma długość $\sqrt{61}$ cm, a jego pole wynosi 60 cm^2. Obliczyć przekątne rombu.



Rys. 153

Rozwiązanie. Niech będzie dany romb $ABCD$ (rys. 153). Wprowadźmy oznaczenia: $AC = x$, $BD = y$. Ponieważ pole rombu jest równe połowie iloczynu jego przekątnych, przeto zgodnie z warunkami zadania jest

$$\frac{xy}{2} = 60, \text{ czyli } xy = 120$$

Drugie równanie otrzymamy, stosując np. do trójkąta prostokątnego AOD twierdzenie Pitagorasa. Na mocy tego twierdzenia mamy równość

$$AO^2+OD^2 = AD^2$$

z której wynika równanie

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=(\sqrt{61})^2$$

Po przekształceniach równanie to przybiera postać (sprawdźcie)

$$x^2+y^2=244$$

Zadanie sprowadza się do rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} xy=120 \\ x^2+y^2=244 \end{cases}$$

Wyznaczając y z pierwszego równania

$$y=\frac{120}{x}$$

i podstawiając do równania drugiego

$$x^2+\left(\frac{120}{x}\right)^2=244$$

otrzymujemy po przekształceniach równanie dwukwadratowe

$$x^4-244x^2+14400=0$$

Dokończcie sami.

Odpowiedź. Przekątne rombu wynoszą 12 cm i 10 cm.

Pytania

1. Wypowiedzcie twierdzenie, z którego skorzystaliśmy w przykładzie 1.
2. Jakie znacie sposoby obliczania pola rombu?
3. Z jakich własności rombu korzystaliśmy w przykładzie 2?
4. Co to jest równanie dwukwadratowe i jak się je rozwiązuje?
5. Zaproponujcie inny sposób rozwiązania układu równań z przykładu 2.

Zadania

1. Bok rombu ma długość 17 cm, przekątne rombu różnią się o 14 cm. Obliczyć przekątne rombu.

2. W trapezie równoramiennym podstawa dolna jest dwa razy większa od podstawy górnej i o 8 dcm większa od wysokości. Bok nierównoległy trapezu wynosi 5 dcm. Wyznaczyć podstawy trapezu.

3. Przyprostokątne pewnego trójkąta prostokątnego różnią się o 3 cm, obwód tego trójkąta wynosi 36 cm. Obliczyć boki.

*4. Obwód trójkąta prostokątnego równa się 208 cm, suma przyprostokątnych jest o 30 cm większa od przeciwprostokątnej. Obliczyć boki trójkąta.

*5. Odcinek o długości a podzielono w ten sposób, że jedna z części jest średnią proporcjonalną całego odcinka i drugiej części. (Jest to tzw. złoty podział odcinka). Obliczyć obie części.

Odpowiedzi

1. 16 cm i 30 cm. **2.** 12 cm i 6 cm. **3.** 9 cm, 12 cm, 15 cm. **4.** 39 cm, 80 cm, 89 cm. **5.** $\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$ i $\frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$.

LEKCJA 92

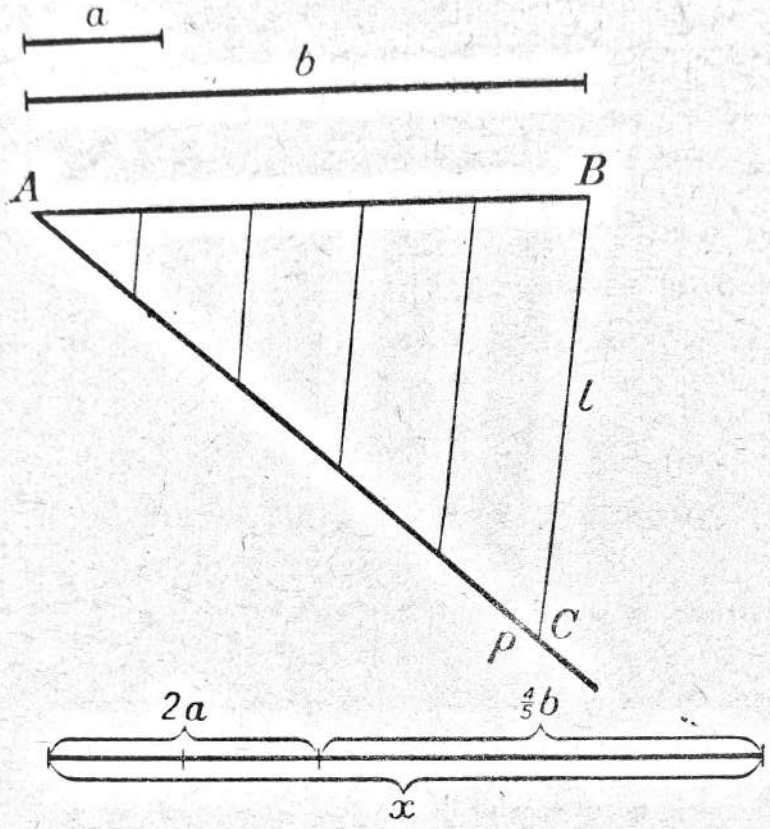
Konstruowanie odcinków według wzorów algebraicznych

Lekcję dzisiejszą i następną przeznaczamy na rozwiązywanie zadań konstrukcyjnych. Będziemy budowali odcinki określone wzorami algebraicznymi.

Przykład 1. Dane są dwa odcinki a i b. Znaleźć odcinek x określony wzorem $x = 2a + \frac{4}{5}b$.

Rozwiązanie. Aby znaleźć odcinek równy $\frac{4}{5}b$, trzeba odcinek b podzielić na 5 równych części i wziąć cztery takie części. Podział odcinka na równe części przypomina rys. 154. Z końca A odcinka $AB = b$ poprowadzono półprostą p i odłożono na niej pięć dowolnych, lecz równych odcinków. Przez koniec C ostatniego z tych odcinków i przez punkt B poprowadzono prostą l, następnie przez inne końce

na półprostej p wykreślono proste równoległe do prostej l. Te proste równoległe podzieliły odcinek AB na 5 równych części. Uzasadnienie tej konstrukcji opiera się na twierdzeniu z kl. VIII, które przypomnieliśmy w lekcji 23, str. 120. Twierdzenie to trzeba znać, gdyż korzystamy z niego przy dowodzie twierdzenia Talesa.



Rys. 154

Przykład 2. Dane są odcinki a i b. Zbudować odcinek x określony wzorem $x = \frac{ab}{c}$.

Rozwiązanie. Mnożąc obie strony tego wzoru przez c, otrzymujemy równość $cx = ab$ równoważną proporcji

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{x}$$

Zadanie polega więc na zbudowaniu odcinka czwartego proporcjonalnego do trzech danych odcinków c, a i b (patrzcie lekcja 24, str. 125).

Dokończcie samodzielnie, przy sposobności powtórzcie twierdzenie Talesa.

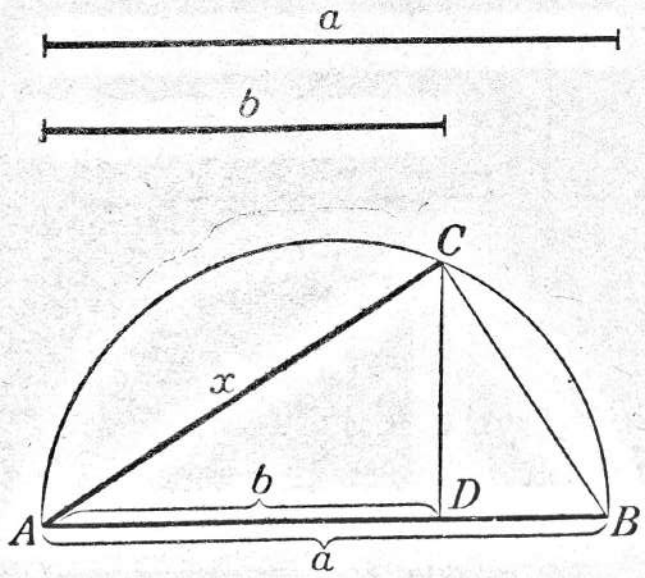
Przykład 3. Zbudować kwadrat, którego pole jest równe polu prostokąta o bokach a i b.

Rozwiązanie. Oznaczając bok kwadratu przez x, mamy równość

$$x^2 = ab$$

(x^2 — pole kwadratu, ab — pole prostokąta). Równość ta oznacza, że bok kwadratu x jest średnią proporcjonalną boków prostokąta a i b. Konstrukcję średniej proporcjonalnej omówiliśmy w lekcji 68, str. 306. Przypomnijcie sobie tę konstrukcję oraz twierdzenie, na którym się opiera. Poniżej podajemy inny sposób konstrukcji średniej proporcjonalnej odcinków a i b oparty na twierdzeniu 1 (str. 293).

Kreślimy odcinek $AB = a$ i odkładamy na nim odcinek $AD = b$. Na odcinku AB jako na średnicy zakreślamy półokrąg i z punktu D wystawiamy prostopadłą do AB aż do przecięcia się z półokręgiem w punkcie C. Odcinek AC jest szukanym odcinkiem x (rys. 155).



Rys. 155

Uzasadnienie konstrukcji. Trójkąt ACB jest prostokątny, przy czym $\sphericalangle ACB = 90°$ (dlaczego?). W trójkącie prostokątnym kwadrat przyprostokątnej równa się iloczynowi przeciwprostokątnej przez rzut tej przyprostokątnej na przeciwprostokątną (twierdzenie 1, str. 293), więc

$$AC^2 = AB \cdot AD$$

czyli

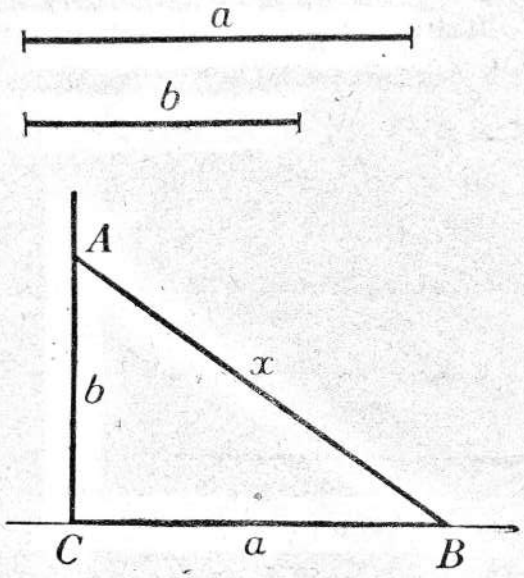
$$x^2 = ab$$

Przykład 4. Dane są odcinki a i b. Zbudować odcinek x określony wzorem $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Rozwiązanie. Podnosząc obie strony tego wzoru do kwadratu, otrzymujemy równość Pitagorasa

$$x^2 = a^2+b^2$$

Jeśli zbudujemy więc trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b, to przeciwprostokątna tego trójkąta będzie szukanym odcinkiem x (rys. 156).



Rys. 156

Uzasadnienie konstrukcji. Trójkąt ABC jest prostokątny z konstrukcji, przy czym $\sphericalangle C = 90°$, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa (wypowiedzcie je głośno) jest

$$AB^2 = AC^2+BC^2$$

czyli

$$x^2 = a^2+b^2$$

a stąd

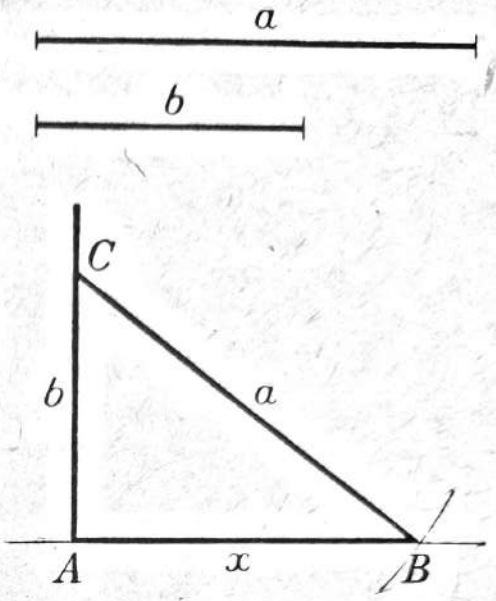
$$x = \sqrt{a^2+b^2}$$

Przykład 5. Dane są dwa odcinki a i b, przy czym $a > b$ (a większy od b). Zbudować odcinek x określony wzorem $x = \sqrt{a^2-b^2}$.

Rozwiązanie. Podnosząc obie strony tego wzoru do kwadratu, otrzymujemy równość

$$x^2 = a^2-b^2$$

Odcinek x możemy więc uważać za przyprostokątną trójkąta prostokątnego, w którym przeciwprostokątna jest równa a, a druga przyprostokątna równa się b (rys. 157).



Rys. 157

Opis konstrukcji. Budujemy kąt prosty o wierzchołku A, na jednym jego ramieniu odkładamy odcinek $AC = b$, po czym z punktu C zakreślamy łuk o promieniu a aż do przecięcia z drugim ramieniem kąta prostego w punkcie B. Odcinek AB jest szukanym odcinkiem x.

Uzasadnienie konstrukcji. Trójkąt ABC jest prostokątny, przy czym $\sphericalangle A = 90°$. Wobec tego na mocy twierdzenia Pitagorasa jest

$$AB^2+AC^2 = BC^2$$

czyli $$x^2+b^2 = a^2$$

a stąd $$x^2 = a^2-b^2$$

więc $$x = \sqrt{a^2-b^2}$$

Pytania

Dobrze przypomnijcie sobie twierdzenia:

1) twierdzenie Talesa;
2) twierdzenie o przyprostokątnej trójkąta prostokątnego;
3) twierdzenie Pitagorasa;
4) twierdzenie o wysokości trójkąta prostokątnego.

Zadania

1. Dane są trzy odcinki a, b, c. Znaleźć odcinek x określony wzorem

$$x = \frac{4}{3}a+\frac{ac}{b}+\sqrt{a^2+b^2}$$

2. Dane są odcinki a, b, c $(b > c)$. Zbudować odcinek x określony wzorem

$$x = \sqrt{ab}+\sqrt{b^2-c^2}$$

3. Opierając się na twierdzeniu Pitagorasa, zbudować odcinek równy $\sqrt{13}$ cm.

4. Opierając się na twierdzeniu Pitagorasa, zbudować odcinek równy $\sqrt{7}$ cm.

Wskazówki: 3. $13 = 4+9$. 4. $7 = 16-9$.

LEKCJA 93

Konstruowanie odcinków według wzorów algebraicznych c. d.

Przykład 1. Dane są odcinki a, b, c. Znaleźć odcinek x określony wzorem $x = \sqrt{a^2-b^2+c^2}$.

Rozwiązanie. Podnieśmy obie strony tego wzoru do kwadratu

$$x^2 = a^2-b^2+c^2$$

i wprowadźmy oznaczenie

(I) $$y^2 = a^2-b^2$$

Wówczas poprzednia równość przybierze postać

(II) $$x^2 = y^2+c^2$$

Plan rozwiązania jest więc następujący: najpierw znajdujemy odcinek y spełniający warunek (I), a następnie odcinek x spełniający warunek (II).

Uzasadnienie konstrukcji (rys. 158) przeprowadźcie sami.

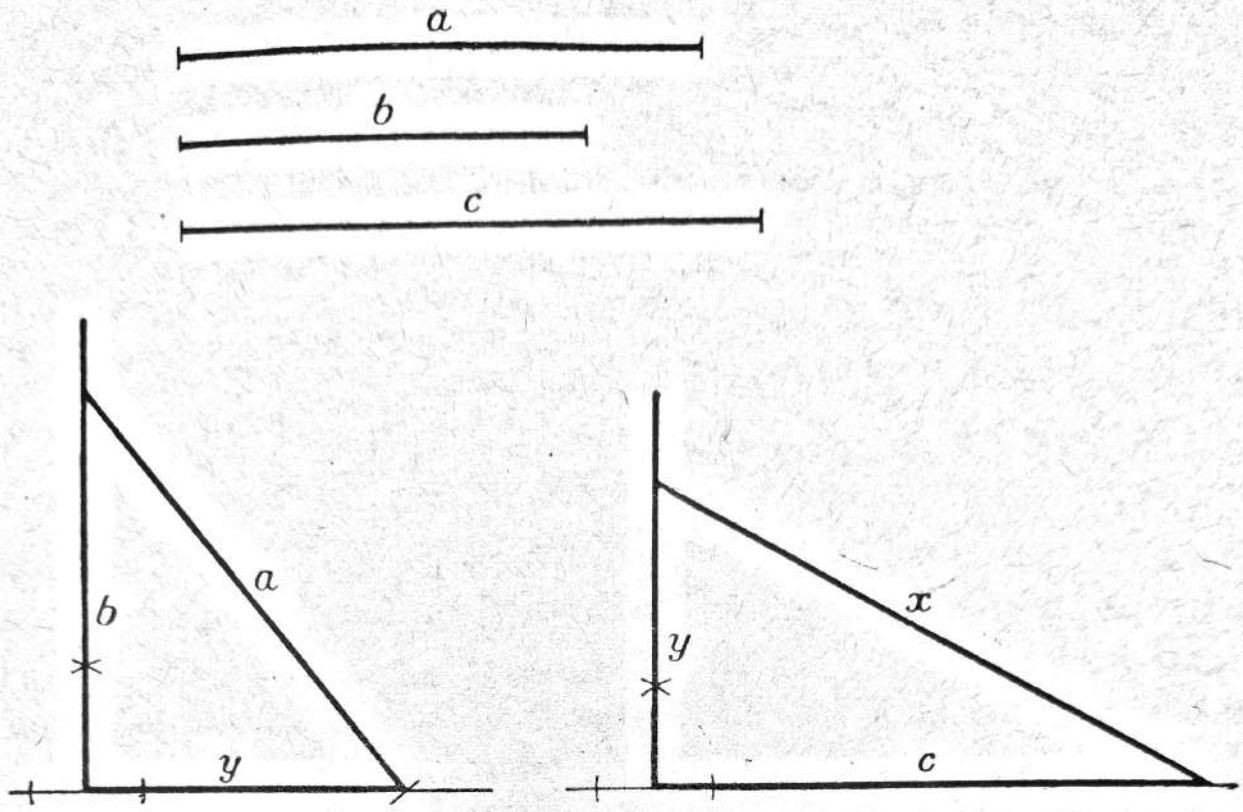
Przykład 2. Dany jest odcinek a. Znaleźć odcinek x określony wzorem $x = a\sqrt{5}$.

Rozwiązanie. Podnosimy obie strony do kwadratu

$$x^2 = 5a^2$$

i otrzymaną równość przedstawiamy w postaci

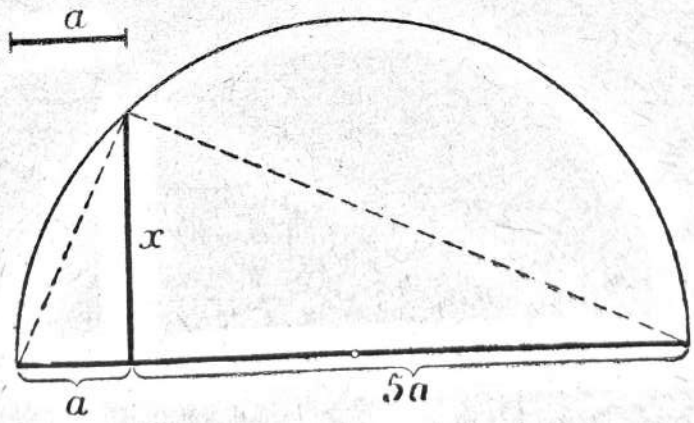
$$x^2 = a \cdot 5a$$



Rys. 158

Widzimy, że odcinek x jest równy średniej proporcjonalnej odcinków a i $5a$.

Poniżej podajemy konstrukcję tej średniej (rys. 159), opartą na twierdzeniu 3 z lekcji 66.



Rys. 159

Podajcie uzasadnienie konstrukcji.

Przykład 3. Dane są odcinki a i b. Znaleźć odcinek x określony wzorem $x = \sqrt{3a^2+b^2}$.

Rozwiązanie. Podnosimy obie strony tego wzoru do kwadratu

$$x^2 = 3a^2 + b^2$$

i wprowadzamy oznaczenie

(I) $$y^2 = 3a^2$$

Wówczas będzie

(II) $$x^2 = y^2 + b^2$$

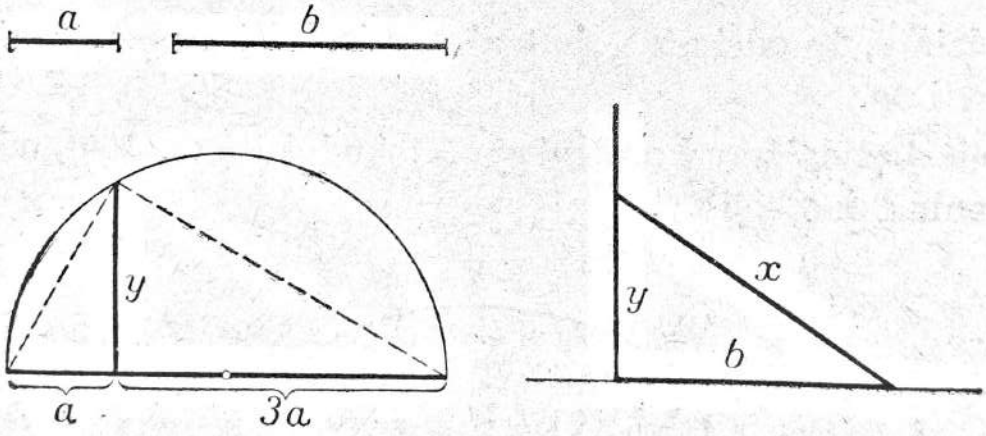
Równości (I) nadajemy postać

$$y^2 = a \cdot 3a$$

z której wynika, że odcinek y jest średnią proporcjonalną odcinków a i $3a$.

Plan rozwiązania jest następujący. Najpierw znajdujemy odcinek y jako średnią proporcjonalną odcinków a i $3a$, a następnie budujemy odcinek x określony wzorem (II) (rys. 160).

Uzasadnienie konstrukcji przeprowadźcie sami.



Rys. 160

Przykład 4. Dane są odcinki a i b. Zbudować odcinek x określony wzorem $x = \sqrt{9a^2 - 4b^2}$.

Rozwiązanie. Zadanie to rozwiązuje się prościej niż poprzednie. Podnosimy obie strony wzoru do kwadratu

$$x^2 = 9a^2 - 4b^2$$

i otrzymaną równość przedstawiamy w postaci

$$x^2 = (3a)^2 - (2b)^2$$

Widzimy, że odcinek x jest przyprostokątną trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna jest równa $3a$, a druga przyprostokątna równa się $2b$.

Konstrukcję wykonajcie sami.

Zadania

1. Dane są odcinki a, b, c. Zbudować odcinek x określony wzorem:

a) $x = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ b) $x = \sqrt{a^2+b^2-c^2}$ c) $x = \sqrt{a^2-b^2-c^2}$

Czy zadania te dadzą się zawsze rozwiązać?

2. Dane są odcinki a i b. Zbudować odcinek x określony wzorem:

a) $x = \sqrt{a^2+4b^2}$ b) $x = \sqrt{9a^2-b^2}$ c) $x = \sqrt{16a^2-9b^2}$

*3. Dane są odcinki a i b. Zbudować odcinek x określony wzorem:

a) $x = \sqrt{2a^2-b^2}$ b) $x = \sqrt{3a^2+2b^2}$

4. Zbudować odcinek $x = \sqrt{8}$ cm.

LEKCJA 94

Pole koła i pole wycinka kołowego

Jak już zapowiedzieliśmy wyżej, ostatnie trzy lekcje matematyki są poświęcone zagadnieniu pomiaru pola koła i wycinka kołowego oraz długości okręgu i łuku.

W lekcji 47 stwierdziliśmy, że każde dwa koła są podobne, przy czym skalą podobieństwa jest stosunek promieni tych kół.

Z lekcji 50 wiemy zaś, że stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Na tych dwóch twierdzeniach oprzemy rozważania o polu koła.

Niech będą dane dwa koła: jedno o promieniu równym 1, drugie o promieniu równym r. Oznaczmy liczbę wyrażającą pole koła o promieniu 1 literą π*). Wówczas pole S koła o promieniu r otrzymujemy ze wzoru

$$\frac{S}{\pi} = \left(\frac{r}{1}\right)^2$$

*) Czytajcie: literą „pi"

w którym wyrażona jest myśl, że stosunek pola S koła o promieniu r do pola π koła o promieniu 1 jest równy kwadratowi skali podobieństwa tych kół.

Przekształcając ten wzór, otrzymujemy kolejno

$$\frac{S}{\pi} = r^2$$

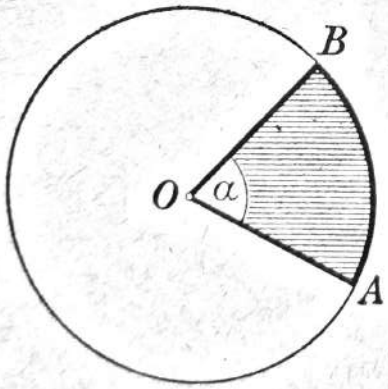
$$\boxed{S = \pi r^2}$$

Ostatni wzór trzeba zapamiętać. Litera r oznacza w nim promień koła, litera S — pole tego koła, litera π jest liczbą wyrażającą pole koła o promieniu 1. Litera π oznacza więc liczbę stałą.

Ze szkoły podstawowej pamiętacie z pewnością, że w przybliżeniu $\pi = 3{,}14$. Więcej wiadomości o tej niezmiernie ważnej liczbie znajdziecie w lekcji 96.

OKREŚLENIE. **Wycinkiem kołowym nazywamy część koła ograniczoną dwoma promieniami i łukiem między nimi zawartym.**

Zwróćcie uwagę, że na rys. 161 mamy dwa wycinki kołowe: jeden z nich (zakreskowany) odpowiada wypukłemu kątowi środkowemu AOB, drugi zaś odpowiada wklęsłemu kątowi środkowemu AOB.



Rys. 161

Pole wycinka kołowego pozostaje w ścisłej zależności z kątem środkowym odpowiadającym temu wycinkowi. Równym kątom środkowym odpowiadają w tym samym kole wycinki przystające, a więc wycinki o równych polach. Dwukrotny wzrost kąta środkowego odpowiada dwukrotnemu wzrostowi pola wycinka. Ogólnie można wykazać, że pole wycinka kołowego jest wprost proporcjonalne do odpowiadającego mu kąta środkowego.

Oznaczmy kąt środkowy AOB przez α, a pole odpowiadającego mu wycinka kołowego przez W.

Kątowi środkowemu 360° odpowiada oczywiście jako wycinek kołowy całe koło, którego pole równa się, jak wiemy, πr^2.

Wobec tego możemy powiedzieć:

Pole wycinka W jest w takim stosunku do pola całego koła, czyli do πr^2, jak kąt środkowy α do kąta $360°$.

$$\frac{W}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360°}$$

Z proporcji tej otrzymujemy wzór na pole wycinka kołowego

$$W = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

Pytania

1. Zacytujcie twierdzenia, na których oparliśmy się przy wyprowadzaniu wzoru na pole koła.
2. Co oznaczyliśmy literą π?
3. Wyprowadźcie wzór: $S = \pi r^2$.
4. Co nazywamy wycinkiem kołowym?
5. Jaka jest zależność między polem wycinka kołowego a odpowiadającym temu wycinkowi kątem środkowym?
6. Wyprowadźcie wzór na pole wycinka kołowego.

Zadania

1. Na papierze milimetrowym narysować ćwiartkę koła o możliwie dużym promieniu. Obliczając ilość zawartych w tej ćwiartce kwadracików milimetrowych, znaleźć pole koła, następnie posługując się wzorem $S = \pi r^2$ wyznaczyć przybliżoną wartość π.

2. Jak zmieni się pole koła, gdy jego promień powiększymy 3 razy?

3. Jak zmieni się pole wycinka kołowego, gdy jego promień powiększymy 3 razy?

4. Pola dwóch kół mają się do siebie tak, jak 1 : 8. Jaki jest stosunek ich promieni?

***5.** Obliczyć pole koła opisanego na kwadracie o polu 196 cm².

***6.** Obliczyć pole wycinka kołowego wiedząc, że promień koła równa się 10 cm, a kąt środkowy wynosi 144°.

***7.** Obliczyć pole pierścienia kołowego zawartego między dwoma współśrodkowymi okręgami o promieniach r_1 i r_2, gdzie $r_1 > r_2$.

**8. Na bokach kwadratu jako na średnicach kreślimy półokręgi leżące wewnątrz kwadratu. Powstaje figura złożona z czterech „listków". Obliczyć pole tej figury wiedząc, że bok kwadratu równa się a.

Odpowiedzi

2. Powiększy się 9 razy. 3. Powiększy się 9 razy. 4. $1:\sqrt{8}$. 5. $98\,\pi$ cm^2. 6. $40\,\pi$ cm^2. 7. $\pi(r_1^2-r_2^2)$. 8. $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2$.

LEKCJA 95

O długości linii krzywych

Po omówieniu zagadnienia pomiaru pola koła przystępujemy teraz do opracowania zagadnienia pomiaru długości okręgu, a więc długości pewnej linii krzywej.

Na wstępie — kilka uwag o długości linii krzywych w ogóle.

Dotychczas mieliśmy do czynienia z mierzeniem długości odcinków lub linii łamanej. Pomiar odcinka polega, jak wiadomo, na tym, że obieramy pewien odcinek jednostkowy i odkładamy go na odcinku mierzonym.

Sposób ten nie daje się zastosować do pomiaru linii krzywej, nie możemy bowiem na krzywej odkładać odcinka jednostkowego będącego częścią linii prostej. Pomiar linii krzywej jest zagadnieniem o wiele bardziej skomplikowanym od pomiaru odcinka i z tego trzeba sobie zdawać sprawę.

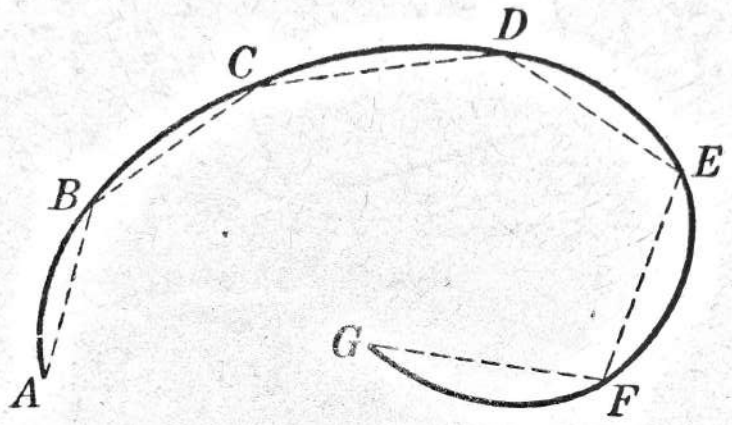
Sięgnijmy do doświadczeń praktycznych. Krętą ścieżkę możemy zmierzyć w ten sposób, że wbijamy wzdłuż niej kołki i obciągamy je mocno sznurem, który następnie zdejmujemy i mierzymy (rys. 162). Pomiar długości rzeki na mapie wykonamy podobnie, używając szpilek i nici. Gdy punkty rozmieszczone są na linii dość gęsto, wynik pomiaru przyjmujemy w praktyce za długość linii.

Analizując sprawę ze stanowiska naukowego, musimy jednakże stwierdzić, że opisane postępowanie nie daje nam długości samej linii krzywej, lecz długość pewnej łamanej wpisanej w tę linię (np.

na rys. 162 zamiast linii krzywej wzięto łamaną $ABCDEFG$). Wynik pomiaru jest więc tylko pewnym przybliżeniem poszukiwanej długości linii krzywej.

Jest to oczywiście przybliżenie z niedomiarem, gdyż linia łamana wpisana w linię krzywą jest krótsza od linii krzywej.

Zauważmy, że mając pewne przybliżenie długości linii krzywej możemy je zawsze ulepszyć. Wystarczy w tym celu obrać na linii dodatkowe punkty, przez co długość łamanej zwiększy się.



Rys. 162

To ulepszone przybliżenie możemy znowu ulepszyć, itd. Postępując w ten sposób, możemy osiągnąć to, że różnica między długością linii a długością łamanej będzie dowolnie mała. Zawsze jednak długość łamanej będzie mniejsza od długości krzywej.

Biorąc pod uwagę powyższe rozważania, przyjmiemy następujące określenie.

OKREŚLENIE. **Długość linii krzywej** jest to liczba l spełniająca dwa warunki:

1) liczba l jest większa od długości każdej łamanej wpisanej w linię krzywą,

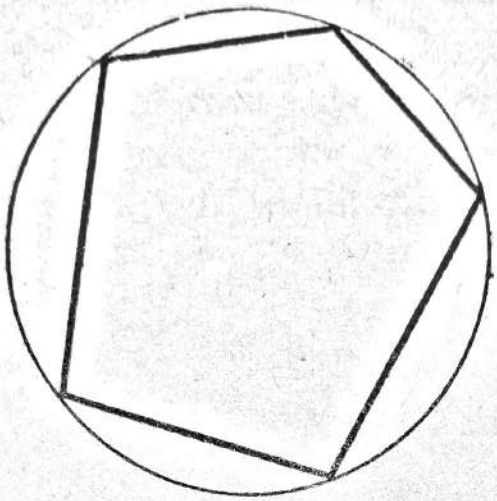
2) można jednakże w linię krzywą wpisać taką linię łamaną, że jej długość różni się od liczby l dowolnie mało.

Najczęściej spotykaną linią krzywą jest okrąg. W następnej lekcji wykażemy, że długość C okręgu wyraża się wzorem

$$C = 2\pi r$$

Zgodnie z przyjętym określeniem wystarczy w tym celu stwierdzić, że:

1) liczba $2\pi r$ jest większa od obwodu każdego wielokąta wpisanego w okrąg (czyli od długości każdej łamanej zamkniętej wpisanej w okrąg),



Rys. 163

2) w okrąg można wpisać taki wielokąt, którego obwód różni się od liczby $2\pi r$ dowolnie mało.

Dowód oprzemy na następującym łatwym twierdzeniu pomocniczym.

*) Niech będzie dany okrąg o promieniu r. W okrąg ten wpiszmy dowolny wielokąt $ABCDE\ldots$, następnie znajdźmy środki A', B', C' ... łuków AB, BC, CD, ... i zbudujmy wielokąt $AA'BB'CC'$ ... jak na rys. 164.

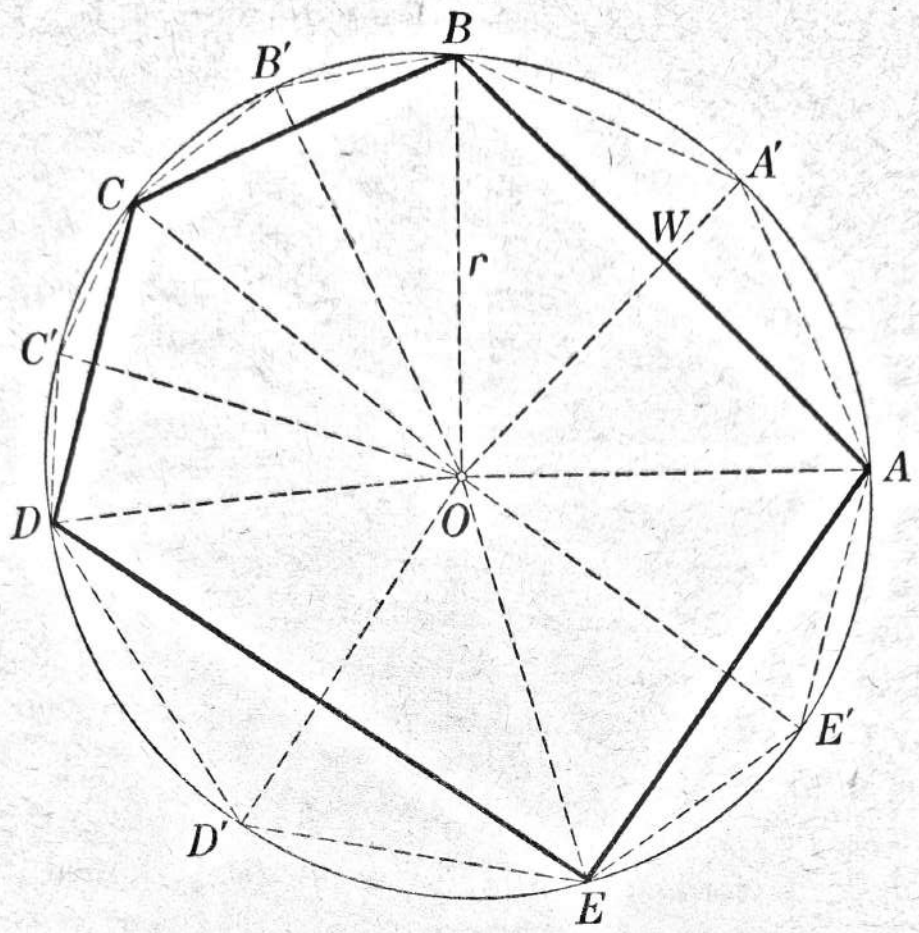
Oznaczmy pole drugiego wielokąta przez P, a obwód pierwszego wielokąta przez p, Udowodnimy, że

$$P = \frac{1}{2} r \cdot p$$

Rozważmy w tym celu czworokąt $AA'BO$. Składa się on z dwóch trójkątów: $\triangle OA'B$ i $\triangle OA'A$. Trójkąty te mają wspólną podstawę OA'. Ponieważ zaś prosta OA' jest symetralną odcinka AB, przeto wysokością trójkąta $OA'B$ jest odcinek BW, a wysokością trójkąta $OA'A$ — odcinek AW. Przeto pole czworokąta $AA'BO$ jest równe

$$\frac{1}{2} OA' \cdot WB + \frac{1}{2} OA' \cdot WA$$

*) Dowód ten można pominąć.



Rys. 164

Przekształcając to wyrażenie oraz biorąc pod uwagę, że $OA' = r$, a $WB+WA = AB$, otrzymujemy kolejno

$$\frac{1}{2}OA'\,(WB+WA) = \frac{1}{2}r\cdot AB,$$

zatem pole czworokąta $AA'BO = \frac{1}{2}r\cdot AB.$

Podobnie pole czworokąta $BB'CO = \frac{1}{2}r\cdot BC$, itd.

Suma pól tych czworokątów jest równa polu S wielokąta $AA'BB'CC'\ \ldots$, przeto

$$P = \frac{1}{2}r\cdot AB+\frac{1}{2}r\cdot BC+\frac{1}{2}r\cdot CD+\ldots$$

$$P = \frac{1}{2}r\cdot(AB+BC+CD+\ldots)$$

Ale suma w nawiasach jest obwodem wielokąta $ABCDE\ldots$, który oznaczyliśmy przez p, więc

$$P = \frac{1}{2} r \cdot p \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Przypominamy, że we wzorze tym r oznacza promień koła, p — obwód wielokąta $ABCDE\ldots$, P — pole wielokąta $AA'BB'CC'\ldots$

Pytania

1. Dlaczego mierzenie linii krzywych jest rzeczą bardziej skomplikowaną niż mierzenie odcinków?
2. W jaki sposób mierzymy długość linii krzywej w praktyce?
3. Co o wyniku takiego pomiaru można powiedzieć ze stanowiska naukowego?
4. Podajcie dokładne określenie długości linii krzywej.
5. Omówcie twierdzenie udowodnione przy końcu tej lekcji.

LEKCJA 96

Długość okręgu i długość łuku okręgu

Postępując w myśl planu naszkicowanego w lekcji poprzedniej można dowieść, że długość C okręgu wyraża się wzorem

$$\boxed{C = 2\pi r}$$

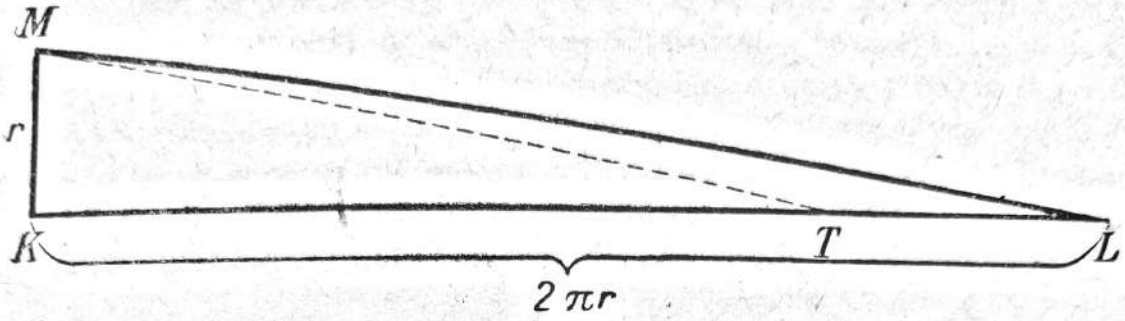
w którym r oznacza promień okręgu, a π jest liczbą znaną nam z lekcji 94.

Dowód tego ważnego twierdzenia jest dość długi i niezbyt łatwy. Zgodnie z programem nauczania nie wymagamy więc od wszystkich uczniów umiejętności przeprowadzenia tego dowodu. Niemniej jednak zachęcamy Was do uważnego przestudiowania go.

Za punkt wyjścia do naszych rozważań weźmiemy wzór na pole koła

$$S = \pi r^2.$$

Wzór ten możemy napisać w postaci $S = \frac{1}{2} r \cdot 2\pi r$, to zaś oznacza, że pole koła równa się polu trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $KM = r$ i $KL = 2\pi r$ (rys. 165). Otóż pokażemy, że właśnie przyprostokątna $KL = 2\pi r$ przedstawia długość okręgu o promieniu r.



Rys. 165

Jeśli pamiętacie, co powiedzieliśmy na temat długości okręgu na str. 407, to zrozumiecie, że musimy uzasadnić dwa twierdzenia:

1. Odcinek KL jest dłuższy od obwodu każdego wielokąta $ABCDE \ldots$ wpisanego w koło.

2. W koło można wpisać wielokąt, którego obwód dowolnie mało różni się od długości KL.

Dla uzasadnienia pierwszego z tych twierdzeń weźmy pod uwagę rys. 164. Wiemy z poprzedniej lekcji, że pole P wielokąta $AA'BB'CC' \ldots$ wyraża się wzorem

$$P = \frac{1}{2} r \cdot p \tag{a}$$

gdzie p oznacza obwód wielokąta $ABCDE \ldots$

Z drugiej strony, jak widzimy z rys. 164, pole P jest mniejsze od pola koła, a więc można je na rysunku 165 przedstawić jako pole pewnego trójkąta MKT mniejszego od trójkąta MKL (tzn. jako pole takiego trójkąta, którego podstawa KT jest mniejsza od podstawy KL trójkąta MKL).

Jeśli zaś P jest równe polu trójkąta MKT, to

$$P = \frac{1}{2} MK \cdot KT$$

czyli

$$P = \frac{1}{2} r \cdot KT \tag{b}$$

Z porównania wzorów (a) i (b) wynika, że

$$p = KT$$

Ostatnia równość oznacza, że p, czyli obwód dowolnego wielokąta $ABC \ldots$ wpisanego w koło, równa się długości odcinka KT, który znowu jest mniejszy od odcinka KL (rys. 165). Stąd wniosek, że p jest mniejsze od KL.

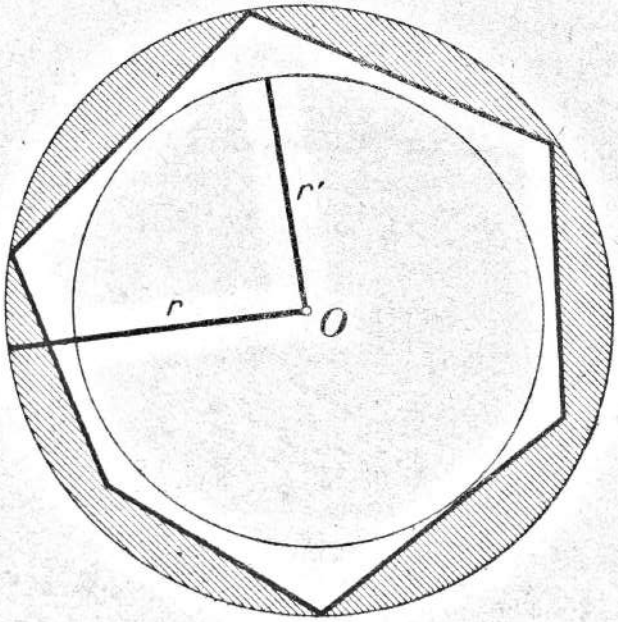
Zatem istotnie odcinek KL jest dłuższy od obwodu dowolnego wielokąta wpisanego w koło. Pierwsze twierdzenie zostało więc uzasadnione.

Z kolei wykażemy, że w koło można wpisać wielokąt, którego obwód różni się dowolnie mało od długości KL (twierdzenie 2). Zwróćmy uwagę na rys. 165. Na rysunku tym KT oznacza obwód wielokąta wpisanego w koło, naszą będzie więc rzeczą wykazać, że odcinek KT może różnić się dowolnie mało od odcinka KL, czyli że punkt T może leżeć dowolnie blisko punktu L.

Do tego wystarczy oczywiście wykazać, że pole trójkąta MTL, czyli różnica pól koła i wielokąta wpisanego, może być dowolnie mała.

Narysujmy w tym celu okrąg współśrodkowy z danym okręgiem i mający promień r' mniejszy od promienia r. Następnie wpiszmy w dany okrąg wielokąt, którego obwód leży w pierścieniu zawartym między obu okręgami (rys. 166).

Różnicę między polem koła i polem wielokąta wpisanego stanowi pole zakreskowanej części pierścienia.



Rys. 166

Od razu widzimy, że tę różnicę możemy uczynić dowolnie małą, gdyż sam pierścień może być tak mały, jak zechcemy, jeśli tylko promień r' jest dostatecznie bliski promieniowi r.

Wróćmy teraz do rys. 165. Omawiana różnica jest na nim przedstawiona jako pole trójkąta MTL. Wykazując, że ta różnica może być dowolnie mała, wykazaliśmy zarazem, że pole trójkąta MTL może być dowolnie małe, czyli że punkt T może leżeć dowolnie blisko punktu L.

To zaś z kolei oznacza, że odcinek KT, wyobrażający — jak wiemy — obwód wielokąta wpisanego w koło, może różnić się dowolnie mało od odcinka KL.

Innymi słowy: można wpisać w koło taki wielokąt, którego obwód różni się dowolnie mało od długości odcinka KL.

W ten sposób udowodniliśmy również drugie twierdzenie.

Przeczytajcie uważnie treść obu twierdzeń. Zgodnie z określeniem długości linii krzywej twierdzenia te mówią nam, że długość C okręgu o promieniu r równa się długości odcinka KL, czyli równa się $2\pi r$.

Tak więc istotnie zachodzi wzór

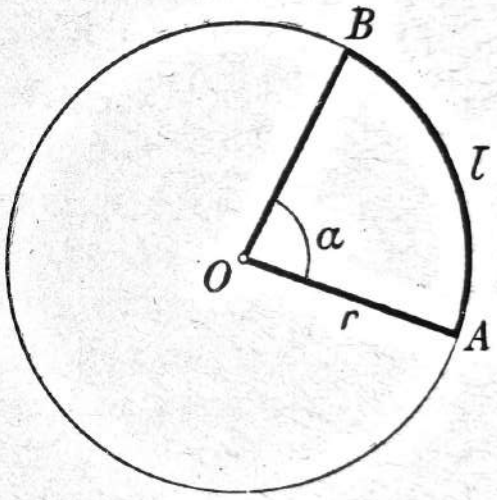
$$C = 2\pi r$$

Wzór ten trzeba zapamiętać

Długość łuku.

Niech będzie dany okrąg o promieniu r i kąt środkowy α. Obliczymy długość l łuku AB odpowiadającego temu kątowi środkowemu (rys. 167).

Długość łuku pozostaje w ścisłej zależności z wielkością odpowiedniego kąta środkowego. Równym kątom środkowym odpowiadają na tym samym okręgu równe łuki, dwukrotnie większemu kątowi środkowemu odpowiada dwukrotnie większy łuk; ogólnie można wykazać, że długość łuku jest wprost proporcjonalna do wielkości odpowiedniego kąta środkowego.



Rys. 167

Ponieważ kątowi pełnemu (360°) odpowiada jako łuk cały okrąg, przeto możemy powiedzieć:

Długość łuku l jest w takim stosunku do długości całego okręgu (czyli do $2\pi r$), jak kąt środkowy α do kąta 360°

$$\frac{l}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Z proporcji tej otrzymujemy wzór na długość łuku

$$l = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r$$

Na zakończenie kilka uwag o liczbie π. W lekcji 194 określiliśmy ją jako liczbę wyrażającą pole koła o promieniu 1.

Przekształcając wzór $C = 2\pi r$ do postaci

$$\pi = \frac{C}{2r}$$

widzimy, że liczba π jest równa stosunkowi długości okręgu do długości średnicy ($2r$ to średnica) tego okręgu.

Zauważcie: okrąg może być mały lub wielki, ale zawsze stosunek obwodu koła do jego średnicy jest stały (jednakowy) i wyraża się właśnie liczbą π.

Fakt ten znany jest ludzkości co najmniej od 4 tysięcy lat, jednakże wartość liczby π znano dawniej z mniejszą aniżeli dzisiaj dokładnością. Hebrajczycy i Babilończycy przyjmowali jako tę wartość liczbę 3. W egipskim papirusie Rhinda*) pochodzącym z wieku XX przed naszą erą spotykamy wartość dokładniejszą 3,16.

Najstarsza metoda systematycznego wyznaczania przybliżeń liczby π pochodzi od Archimedesa, genialnego matematyka i fizyka greckiego z III wieku przed naszą erą. Archimedes obliczał kolejno obwody wpisanych w koło i opisanych na tym kole wielokątów foremnych o 6, 12, 24, 48, 96 ... bokach i stąd otrzymywał przybliżenia liczby π z niedomiarem i z nadmiarem. Oto wyniki tej metody zapisane w transkrypcji współczesnej (litera p oznacza tu stosunek obwodu wielokąta wpisanego w koło do średnicy koła, a litera P — stosunek obwodu wielokąta opisanego na kole do średnicy koła; cyferki przy tych literach oznaczają liczbę boków danego wielokąta):

$p_6 = 3{,}00000\ldots$ $\quad$ $P_6 = 3{,}46410\ldots$

$p_{12} = 3{,}10583\ldots$ $\quad$ $P_{12} = 3{,}21539\ldots$

$p_{24} = 3{,}13263\ldots$ $\quad$ $P_{24} = 3{,}15966\ldots$

$p_{48} = 3{,}13935\ldots$ $\quad$ $P_{48} = 3{,}14609\ldots$

$p_{96} = 3{,}14103\ldots$ $\quad$ $P_{96} = 3{,}14271\ldots$

$p_{192} = 3{,}14145\ldots$ $\quad$ $P_{192} = 3{,}14187\ldots$

$p_{384} = 3{,}14156\ldots$ $\quad$ $P_{384} = 3{,}14166\ldots$

$p_{768} = 3{,}14158\ldots$ $\quad$ $P_{768} = 3{,}14161\ldots$

$p_{1536} = 3{,}14159\ldots$ $\quad$ $P_{1536} = 3{,}14160\ldots$

Widzimy, że wpisując w okrąg i opisując na okręgu wielokąt o coraz większej liczbie boków uzyskujemy coraz lepsze przybliżenie liczby π.

---

*) Papirus ten znajduje się obecnie w British Museum w Londynie.

Metodą Archimedesa (z biegiem czasu ulepszaną i modyfikowaną) posługiwali się matematycy w ciągu wielu stuleci starając się obliczyć coraz więcej cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby π. Dziś metoda ta ma już tylko historyczne znaczenie, szybki bowiem rozwój analizy matematycznej*) przyniósł wiele wzorów pozwalających obliczać przybliżenia π znacznie szybciej.

Podajemy 30 cyfr po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby π:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338\overline{2}279\ldots$$

W praktyce wystarcza najczęściej przybliżenie $\pi \approx 3{,}1416$, niekiedy można nawet przyjąć $\pi \approx 3{,}14$.

Rozwinięcie dziesiętne liczby π jest ułamkiem nieskończonym nieokresowym, gdyż π jest liczbą niewymierną. Niewymierność liczby π udowodnił J. H. Lambert w r. 1761. W 121 lat później F. Lindemann dowiódł, że π jest liczbą niewymierną przestępną, tzn. nie jest pierwiastkiem żadnego równania algebraicznego o współczynnikach wymiernych.

Pytania

1. Za pomocą jakiego wzoru obliczamy długość okręgu?
2. Jakie dwa twierdzenia należało uzasadnić dla wykazania, że długość okręgu równa się iloczynowi $2\pi r$?
*3. W jaki sposób uzasadniliśmy pierwsze z tych twierdzeń? Jakimi rysunkami posługiwaliśmy się przy tym uzasadnianiu? Z jakich twierdzeń korzystaliśmy?
*4. W jaki sposób uzasadniliśmy drugie twierdzenie? Jakimi rysunkami posługiwaliśmy się przy tym?
5. Z jakiej proporcji obliczamy długość łuku?
6. Czego dowiedzieliśmy się w tej lekcji o liczbie π?

Zadania

1. Długość promienia kuli ziemskiej wynosi 6378 km. Obliczyć długość równika. Przyjąć $\pi = 3{,}14$.

2. Pień drzewa ma obwód równy 2,35 m. Zakładając, że przekrój poprzeczny pnia jest kołem, obliczyć pole przekroju.

---

*) Analiza matematyczna — jedna z gałęzi matematyki wyższej.

3. Obliczyć pole koła, którego obwód (długość okręgu) równa się C.

4. Obliczyć długość okręgu koła, którego pole równa się S.

***5.** Grubość ściany rury betonowej wynosi 15 cm, obwód zewnętrzny rury równa się 1,57 m. Obliczyć obwód wewnętrzny.

***6.** Obliczyć długość łuku okręgu wiedząc, że promień okręgu jest równy 20 cm, a odpowiedni kąt środkowy ma 72°.

***7.** Promień okręgu równa się 20 cm. Obliczyć kąt środkowy oparty na łuku o długości 7,85 cm.

***8.** Na budziku wskazówka minutowa ma długość 3 cm. Jaką drogę przebywa koniec wskazówki w ciągu 8 godzin?

***9.** W okrąg o promieniu 30 cm wpisano trójkąt, którego dwa kąty są równe odpowiednio 70° i 50°. Obliczyć długości łuków wyznaczonych na okręgu przez wierzchołki trójkąta.

Odpowiedzi

1. 40000 km. **2.** 0,44 m². **3.** $\frac{C^2}{4\pi}$. **4.** $2\sqrt{\pi \cdot S}$. **5.** 0,628 m. **6.** 25,1 cm. **7.** 22°30′. **8.** 151 cm. **9.** 73,3 cm, 52,3 cm, 62,8 cm. Wskazówka: Połączyć wierzchołki trójkąta ze środkiem okręgu. Obliczyć kąty środkowe, stosując twierdzenie z klasy VIII: *kąt wpisany w okrąg jest równy połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.*

POWTÓRZENIE ALGEBRY

1. Napiszcie postać ogólną trójmianu kwadratowego i doprowadźcie ją do postaci kanonicznej.
2. Jaki jest warunek istnienia miejsc zerowych trójmianu? Wyprowadźcie wzory na miejsca zerowe trójmianu.
3. Napiszcie wzory, na podstawie których rozkładamy trójmian kwadratowy na czynniki. Kiedy nie można trójmianu kwadratowego rozłożyć na czynniki?
4. Co jest wykresem funkcji $y = ax^2$? Omówcie przebieg wykresu dla $a > 0$ i $a < 0$.
5. Jak wykreślamy parabolę $y = ax^2 + c$? Jakie są współrzędne wierzchołka tej paraboli? Jak znajdujemy współrzędne punk-

tów przecięcia tej paraboli z osią OX? Czy te punkty przecięcia istnieją zawsze?

6. Jak wykreślamy parabolę $y = a(x-p)^2$? Jakie są współrzędne wierzchołka tej paraboli i jak położona jest oś symetrii?
7. Jak wykreślamy parabolę $y = a(x-p)^2+q$? Jakie są współrzędne wierzchołka tej paraboli?
8. Jak wykreślamy parabolę $y = ax^2+bx+c$?
   a) Jakie jest znaczenie współczynnika a?
   b) Jakie są współrzędne wierzchołka paraboli?
   c) Jak położona jest oś symetrii tej paraboli?
   d) Co oznacza na wykresie wyraz wolny c?
   e) Jakie są współrzędne punktów przecięcia paraboli z osią OX? Od czego uzależnione jest istnienie tych punktów?
   f) Kiedy funkcja $y = ax^2+bx+c$ ma minimum, a kiedy maximum? Jakim wzorem wyraża się minimum i maximum tej funkcji i dla jakiej wartości zmiennej x funkcja to minimum czy maximum osiąga?
9. Omówcie sposób postępowania przy rozwiązywaniu metodą podstawiania układu dwu równań z dwiema niewiadomymi, z których jedno jest stopnia pierwszego, a drugie stopnia drugiego. Co nazywamy rozwiązaniem układu dwu równań z dwiema niewiadomymi?
10. Co znaczy rozwiązać graficznie układ dwu równań z dwiema niewiadomymi? Omówcie sposób postępowania na przykładzie

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 10 \\ x+y = 4 \end{cases}$$

11. Kiedy układ dwu równań z dwiema niewiadomymi jest oznaczony, kiedy sprzeczny, a kiedy nieoznaczony?

POWTÓRZENIE GEOMETRII

1. Jak budujemy odcinki dane wzorami:

a) $x = \dfrac{ab}{c}$ b) $x = \sqrt{ab}$

c) $x = \sqrt{a^2+b^2}$ d) $x = \sqrt{a^2-b^2}$

gdzie a i b oznaczają odcinki dane?

2. Co oznacza liczba π?
3. Wyprowadźcie wzór na pole koła.
4. Wyprowadźcie wzór na pole wycinka kołowego.
5. Na czym polega trudność mierzenia długości linii krzywej? Jak sobie z tym zagadnieniem radzimy w praktyce?
6. Jakie warunki spełnia liczba, którą w języku naukowym nazywamy długością linii krzywej?
7. Naszkicujcie plan dowodu twierdzenia o długości okręgu.
8. Wyprowadźcie wzór na długość łuku.
9. Czego dowiedzieliście się w lekcji 96 o liczbie π?

PYTANIA I ZADANIA Z CAŁOŚCI MATERIAŁU

1. A) Wykonać działania

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2+(\sqrt{15}-\sqrt{7})(\sqrt{15}+\sqrt{7})$$

B) Dane są dwa okręgi zewnętrznie styczne. Odległość ich środków wynosi 54 cm, sieczna poprowadzona przez ich punkt styczności wyznacza w tych okręgach cięciwy długości 5 cm i 13 cm. Obliczyć średnice obu okręgów.

2. A) Wykonać działania

$$\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{6}\cdot\sqrt[12]{16}}{\sqrt[3]{4}}$$

B) Obliczyć pole trójkąta równobocznego o boku a.

3. A) Wykonać działania

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$$

B) Obliczyć pole koła wpisanego w trójkąt równoramienny o bokach 10 cm, 10 cm, 12 cm.

4. A) Dla wycieczki liczącej 40 osób zamówiono pewną ilość przedziałów kolejowych. Ponieważ w ostatniej chwili kolej przydzieliła o 1 przedział mniej, musiano ulokować w każdym

przedziale po dwie osoby więcej niż zamierzano. Ile przedziałów zamówiono?

B) Dane są odcinki a i b, przy czym $a > b$. Zbudować odcinek x określony wzorem $x = a - \sqrt{a^2 - b^2}$.

5. A) Kupiono towaru dwóch gatunków: pierwszego za 210 zł, a drugiego za 156 zł. Wiedząc, że pierwszego gatunku kupiono o 3 kg więcej niż drugiego oraz że kilogram towaru pierwszego gatunku kosztował o 1 zł więcej niż kilogram drugiego, obliczyć, ile kupiono kilogramów towaru każdego gatunku.

B) Dane są trzy odcinki a, b i c. Zbudować odcinek x spełniający warunek $x = \frac{ac}{b}$

6. A) Ułożyć równanie kwadratowe, którego pierwiastki są:

$$\frac{3+2\sqrt{5}}{3} \text{ i } \frac{3-2\sqrt{5}}{3}$$

B) Obliczyć wysokość trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $a = 5$ cm i $b = 12$ cm.

7. A) Odległość między miastami nadrzecznymi A i B wynosi 22,5 km. Statek przebywa drogę z miasta A do miasta B i z powrotem do A w ciągu 4 godzin. Prędkość prądu rzeki wynosi 3 km/godz. Jaka jest prędkość własna statku?

B) Dane są odcinki a i b. Zbudować odcinek x spełniający warunek $x = \sqrt{ab}$.

8. A) Wykonać działania

$$\frac{3x-7}{x^2-5x+6} - \frac{5}{x^2+x-6} - \frac{x+9}{x^2-9}$$

B) Obliczyć pole koła, którego obwód wynosi 371 cm.

9. A) Rozwiązać równania

a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ b) $\sqrt{x+7} - \sqrt{x} = 1$

B) Udowodnić jedną z cech podobieństwa trójkątów.

10. A) Uprościć ułamek algebraiczny

$$\frac{4x^2+7x-2}{4x^2-13x+3}$$

B) Obliczyć pole koła opisanego na kwadracie o boku a.

11. A) Rozwiązać równanie

$$\frac{x+4}{x^2-5x+6}-\frac{6}{x^2-x-2}=\frac{14}{x^2-2x-3}$$

B) Wypowiedzieć i zilustrować na rysunku znane twierdzenia o trójkącie prostokątnym.

12. A) Rozwiązać równanie

$$\frac{x+8}{2x^2-x-1}+\frac{1}{x-1}=3$$

B) Wyprowadzić wzór na pole trójkąta.

13. A) Rozwiązać równanie

$$\sqrt{x+14}-\sqrt{x+5}=1$$

B) Wypowiedzieć i udowodnić twierdzenie Talesa.

14. A) Rozwiązać równanie

$$\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-4}}=\frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-7}}$$

B) Wyprowadzić wzór na pole rombu, gdy dane są obie jego przekątne.

15. A) Obliczyć boki i pole prostokąta wiedząc, że jego przekątna ma długość 10 cm, a jeden z boków jest większy od drugiego o 2 cm.

B) W dany wycinek koła wpisać kwadrat. Dwa wierzchołki kwadratu mają leżeć na łuku, dwa pozostałe na promieniach ograniczających wycinek. Przy konstrukcji zastosować metodę jednokładności.

16. A) Rozwiązać algebraicznie i graficznie układ równań

$$\begin{cases} xy = 4 \\ 2x+y = 2 \end{cases}$$

B) Obliczyć pole rombu o boku a i kącie ostrym 45°.

17. A) Który z poniższych układów równań jest sprzeczny, a który nieoznaczony?

a) $\begin{cases} x^2-9y^2+6y = 5 \\ x+3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-y^2+6y = 9 \\ x+y = 3 \end{cases}$

B) Obliczyć promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku a.

18. A) Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} xy - 5x = 2 \\ 2xy+3y = 3 \end{cases}$$

B) Wypowiedzieć i udowodnić odwrotne twierdzenie Talesa.

19. A) Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x^2-y^2 = 7 \\ x^2-3y^2 = 7 \end{cases}$$

B) Wypowiedzieć i udowodnić twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie.

20. A) Sprowadzić poniższe trójmiany kwadratowe do postaci kanonicznej:

a) x^2+6x+7 b) $3x^2-6x+8$ c) $2x^2+16x-25$

B) Obliczyć promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a.

21. A) Rozłożyć poniższe trójmiany kwadratowe na czynniki stopnia pierwszego:

a) $x^2+7x+12$ b) $4x^2-8x-12$
c) $-x^2+8x-16$ d) $-3x^2+11x+4$

B) Udowodnić twierdzenie Pitagorasa.

22. A) Wykreślić funkcje:

a) $y = 2x^2-3$ b) $y = -x^2-2$

c) $y = -(x+1)^2$ d) $y = 2(x-3)^2$

B) Pole rombu wynosi 3960 cm², jedna z przekątnych rombu ma długość 198 cm. Obliczyć bok i wysokość rombu.

23. A) Wykreślić funkcję $y = 2x^2-6x+\frac{5}{2}$.

B) Pole trójkąta ABC jest równe 24 cm², jego wysokość $CD = 4$ cm. Obliczyć pole trójkąta podobnego $A'B'C'$, wiedząc, że jego wysokość $C'D' = 10$ cm.

24. A) Wykreślić funkcję

$$y = -x^2-6x-8$$

B) Dane są odcinki a i b. Zbudować odcinek x spełniający warunek $x = a\sqrt{3}+\sqrt{a^2+b^2}$

25. A) Rozwiązać algebraicznie i graficznie układ równań

$$\begin{cases} x^2-4x+y = -3 \\ 2x+y = 5 \end{cases}$$

B) W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AC = BC$, $AB = 48$ cm, wysokość $CD = 32$ cm, poprowadzono wysokość AE (na bok BC). Obliczyć odcinek BE. Rozwiązanie oprzeć na podobieństwie trójkątów.

26. A) Rozwiązać algebraicznie i graficznie układ równań

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 17 \\ x-4y = 17 \end{cases}$$

B) Boki trójkąta ABC są: $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm. Obliczyć stosunek odcinków, na które dwusieczna kąta A dzieli dwusieczną kąta C.

27. A) Iloczyn licznika i mianownika pewnego ułamka wynosi 30. Jeżeli licznik zwiększymy o 10, a mianownik o 3, to otrzy-

mamy ułamek dwa razy większy od ułamka pierwotnego. Jaki to ułamek?

B) Obliczyć pole koła, którego obwód wynosi 471 cm.

28. A) Liczba dwucyfrowa jest o 20 większa od iloczynu jej cyfr. Jeżeli w liczbie tej zmienimy porządek cyfr, otrzymamy liczbę o 18 większą od liczby pierwotnej. Jaka to liczba?

B) Obliczyć pole równoległoboku o bokach a i b i kącie ostrym $60°$.

29. A) Dwu robotników pracując razem może wykonać pewną pracę w ciągu 15 dni. Praca ta była wykonana w ciągu 32 dni, gdyż połowę jej wykonał tylko pierwszy robotnik, a następnie resztę drugi robotnik. W ciągu ilu dni pracę tę może wykonać każdy robotnik pracując sam?

B) Wyprowadzić wzór na pole równoległoboku.

30. A) Na drodze o długości 90 m koło wykonało pewną ilość obrotów. Gdyby obwód tego koła zwiększyć o $\frac{1}{2}$ m, to na tej samej drodze wykonałoby ono o 15 obrotów mniej. Jaki jest obwód koła i ile obrotów wykonało koło na danej drodze?

B) Wyprowadzić wzór na pole trapezu.

31. A) Sprawdzić, że jednym z pierwiastków równania

$$x^3-7x^2+14x-6=0$$

jest $x=2-\sqrt{2}$.

B) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego wynosi 17 cm, a pole wynosi 60 cm^2. Obliczyć przyprostokątne tego trójkąta.

PIERWIASTKI KWADRATOWE I SZEŚCIENNE Z LICZB NATURALNYCH OD 1 DO 100

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	27	5,1962	3
2	1,4142	1,2599	28	5,2915	3,0366
3	1,7321	1,4422	29	5,3852	3,0723
4	2	1,5874	30	5,4772	3,1072
5	2,2361	1,7100	31	5,5678	3,1414
6	2,4495	1,8171	32	5,6569	3,1748
7	2,6458	1,9129	33	5,7446	3,2075
8	2,8284	2	34	5,8310	3,2396
9	3	2,0801	35	5,9161	3,2711
10	3,1623	2,1544	36	6	3,3019
11	3,3166	2,2240	37	6,0828	3,3322
12	3,4641	2,2894	38	6,1644	3,3620
13	3,6056	2,3513	39	6,2450	3,3912
14	3,7417	2,4101	40	6,3246	3,4200
15	3,8730	2,4662	41	6,4031	3,4482
16	4	2,5198	42	6,4807	3,4760
17	4,1231	2,5713	43	6,5574	3,5034
18	4,2426	2,6207	44	6,6332	3,5303
19	4,3589	2,6684	45	6,7082	3,5569
20	4,4721	2,7144	46	6,7823	3,5830
21	4,5826	2,7589	47	6,8557	3,6088
22	4,6904	2,8020	48	6,9282	3,6342
23	4,7958	2,8439	49	7	3,6593
24	4,8990	2,8845	50	7,0711	3,6850
25	5	2,9240	51	7,1414	3,7084
26	5,0990	2,9625	52	7,2111	3,7325

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
53	7,2801	3,7563	77	8,7750	4,2543
54	7,3485	3,7798	78	8,8318	4,2727
55	7,4162	3,8030	79	8,8882	4,2908
56	7,4833	3,8259	80	8,9443	4,3089
57	7,5498	3,8485	81	9	4,3267
58	7,6158	3,8709	82	9,0554	4,3445
59	7,6811	3,8930	83	9,1104	4,3621
60	7,7460	3,9149	84	9,1652	4,3795
61	7,8102	3,9365	85	9,2195	4,3968
62	7,8740	3,9579	86	9,2736	4,4140
63	7,9373	3,9791	87	9,3274	4,4310
64	8	4	88	9,3808	4,4480
65	8,0623	4,0207	89	9,4340	4,4647
66	8,1240	4,0412	90	9,4868	4,4814
67	8,1854	4,0615	91	9,5394	4,4979
68	8,2462	4,0817	92	9,5917	4,5114
69	8,3066	4,1016	93	9,6437	4,5307
70	8,3666	4,1213	94	9,6954	4,5468
71	8,4261	4,1408	95	9,7468	4,5629
72	8,4853	4,1602	96	9,7980	4,5789
73	8,5440	4,1793	97	9,8489	4,5947
74	8,6023	4,1983	98	9,8995	4,6104
75	8,6603	4,2172	99	9,9499	4,6261
76	8,7178	4,2358	100	10	4,6416